باسمه تعالی

سیستم های کنترل بهینه

بیژن معاونی

b_moaveni@yahoo.com

بهمن ۱۳۸۷

رئوس مطالب

- مقدمه، تعاریف
- تابع معیار و ارزشیابی عملکرد
- برنامه ریزی پویا
- حساب تغییرات
- روش تغییراتی در مسائل کنترل بهینه

۲

نحوه ارزیابی دوره

- تمرین
  - هر تمرین ۱ نمره(۵ نمره)
- پروژه
  - ۳ نمره
- امتحان پایان ترم
  - ۱۲ نمره

۳

مراجع

- D.E. Kirk، *مقدمه ای بر تئوری کنترل بهینه*، ترجه دکتر نیکروش، انتشارات: دانشگاه صنعتی امیرکبیر.
- Anderson, B., and Moore, J., *Optimal Control: Linear-Quadratic Methods*, Prentice Hall, 1990.
- Hull, D. *Optimal Control Theory for Applications*, Springer-Verlag, 2003.
- Kwakernaak, H., and Sivan, R., *Linear Optimal Control Systems*, Wiley, 1972.
- F. Lewis, V.L. Syrmos, *Applied Optimal Control and Estimation: Digital Design & Implementation* , Prentice Hall, 1992.

۴

فصل اول: مقدمه

- **تعریف عام سیستم کنترل بهینه:**

تعیین سیگنال کنترل بطوری که در محدودیت ها یا قیود فیزیکی صدق کرده و در ضمن معیار معینی را حداقل و یا حداکثر نماید.

- **آماده سازی یک مساله کنترل بهینه:**

۱. مدل سازی سیستم بصورت مشخص نمودن معادلات دینامیکی آن.
۲. مشخص نمودن و تعریف ریاضی محدودیت های فیزیکی.
۳. تعیین معیار عملکرد سیستم (مشخص نمودن تابع هزینه).

۵

مدل سازی سیستم

- **مدل سازی سیستم:**

توصیف دینامیک و نحوه ارتباط ورودی-خروجی سیستم به ساده ترین صورت ممکن. (در این درس مدلسازی به توصیف سیستم با معادلات دیفرانسیل معمولی محدود می شود، به عبارت دیگر بحث اصلی توصیف سیستم به صورت معادلات فضای حالت **LTI** خواهد بود)

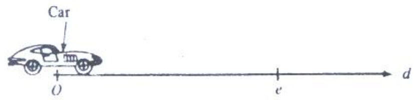
$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t)) \rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

- $u(t)$: سابقه مقادیر سیگنال کنترل.
- $x(t)$: سابقه مقادیر وضعیت یا حالت.

۶

مدل سازی سیستم

- **مثال ۱-۱.۱:** *شکل ص ۴(۱-۱)*



شکل ۱-۱ یک مثال ساده شده کنترل

$$\ddot{d}(t) = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Accelerate}}}{\alpha(t)} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Brake}}}{\beta(t)}$$

$$x_1(t) = d(t) \qquad \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t)$$

$$x_2(t) = \dot{d}(t)$$

۷

محدودیت ها و قیود فیزیکی

- **در کنترل بهینه لازم است محدودیتهای فیزیکی بر روی حالت ها و کنترل ها تعریف گردد.**
- مثال ۲-۱.۱:
  - **محدودیت روی حالت:**
    - اگر اتومبیل از حالت سکون در نقطه O شروع کند و در نقطه e متوقف شود:

$$\left.\begin{matrix} 1-\begin{cases} x_1(t_0) = 0 \\ x_1(t_f) = e \end{cases} \\ 2-\begin{cases} x_2(t_0) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t_f) = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}$$

۸

محدودیت ها و قیود فیزیکی

- ادامه مثال ۲-۱.۱:
  - اگر اتومبیل هرگز عقب نرود:

$$3-\begin{cases}0 \le x_1(t) \le e \\ 0 \le x_2(t)\end{cases}$$

  - محدودیت های ورودی:

$$4-\begin{cases}0 \le u_1(t) \le M_1 \quad \leftrightarrow \quad Depend \quad on \quad Motor \quad Power \\ -M_2 \le u_2(t) \le 0 \leftrightarrow \quad Depend \quad on \quad Brake \quad System\end{cases}$$

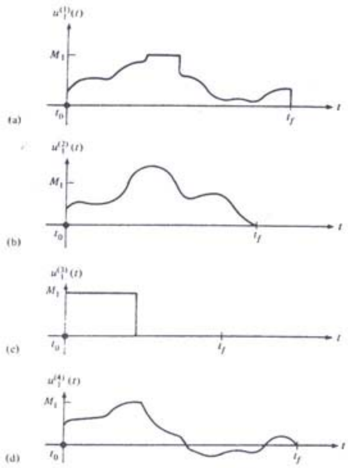
  - محدودیت سوخت:

$$5-\quad \int_{t_0}^{t_f} [k_1 u_1(t) + k_2 x_2(t)]dt \le G$$

۹

محدودیت ها و قیود فیزیکی

- ادامه مثال ۲-۱.۱: شکل (۳-۱).



شکل ۳-۱ : چند منحنی شتاب

۱۰

محدودیت ها و قیود فیزیکی

- تعریف کنترل قابل قبول(*Admissible Control*):

سیگنال کنترلی که در تمام زمان مورد نظر در محدودیت های ورودی (کنترل) صدق نماید.

- منحنی مسیر قابل قبول(*Admissible Trajectory*):

منحنی مسیر متغیر وضعیت که در تمام زمان مورد نظر در محدودیت های حالت صدق نماید.

ارزیابی عملکرد

- به منظور ارزیابی کمی عملکرد یک سیستم، طراح باید نحوه ارزیابی عملکرد یا تابع معیار (هزینه) را انتخاب نموده و در یک سیستم کنترل بهینه آن را حداکثر و/یا حداقل نماید.

  - عملکرد: *Performance*
  - تابع هزینه: *Cost Function*

  – مثال۳-۱.۱: در مورد مثال اتومبیل اگر بخواهیم فاصله دو نقطه را در کمترین زمان ممکن و/یا به عبارت دیگر با ماکزیمم سرعت طی نماییم آنگاه تابع هزینه:

$$J = t_f - t_0$$

مسأله کنترل بهینه

- مسأله ای که در این درس به دنبال حل آن هستیم عبارت است از:

کنترل قابل قبول $\mathbf{u}^*$ که باعث می شود سیستم $\dot{\mathbf{x}}(t) = a(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$
مسیر قابل قبول $\mathbf{x}^*$ را تعقیب نموده و تابع هزینه زیر را حداقل نماید:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

$\mathbf{u}^*$: کنترل بهینه

$\mathbf{x}^*$: منحنی مسیر بهینه

۱۳

مسأله کنترل بهینه (چند نکته)

۱. ممکن است جوابی برای مسأله وجود نداشته باشد که:

- قابل قبول باشد.
- مسیر مطلوبی را طی نماید.

لازم به ذکر است که پیدا نمودن جواب معمولا ساده تر از اثبات وجود و/یا عدم وجود جواب است.

۲. امکان دارد جواب منحصر به فردي وجود نداشته باشد.

- طراح می تواند یکی از جواب ها را انتخاب نماید و یا با تعریف پارامترهای اضافی که در تابع هزینه در نظر گرفته نشده اند مانند قیمت، اندازه و ... انتخاب خود را انجام دهد.

۱۴

مسأله کنترل بهینه (چند نکته)

۳. ما به دنبال پاسخی هستیم که تابع هزینه را به حداقل مطلق برساند.

- به عبارت دیگر اگر $\mathbf{u}^*$ باعث حداقل شدن تابع معیار می شود:

$$J^* = h(\mathbf{x}^*(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)dt \le h(\mathbf{x}(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)dt$$

$$where: \begin{cases} \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U} \end{cases}$$

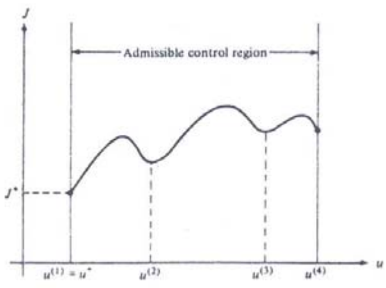
$\mathbf{X}$: مجموعه مسیر ها و یا حالات قابل قبول

$\mathbf{U}$: مجموعه ورودی های قابل قبول

۱۵

مسأله کنترل بهینه (چند نکته)

شکل (۵-۱)ص ۱۴



شکل ۵-۱ نمایشی از مسئله بهینه یابی

مثال ۵-۱.۱(ص۱۵)

۱۶

سیاست بهینه (Optimal Policy)

تعریف: اگر یک رابطه تابعی به صورت: $\boxed{\mathbf{u}^*(t) = f(\mathbf{x}(t), t)}$

بتوان برای کنترل بهینه بدست آورد آن را قانون کنترل بهینه یا سیاست بهینه می نامند.

یادآوری

نمایش سیستم ها در فضای حالت:

مزایای این نوع توصیف در درس کنترل مدرن نشان داده شد.

– سیستم غیرخطی و متغیر با زمان $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$

– سیستم غیرخطی و نا متغیر با زمان $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$

– سیستم خطی و متغیر با زمان $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$

– سیستم خطی و نا متغیر با زمان(LTI) $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$

یادآوری

نمایش سیستم ها در فضای حالت:

معادلات خروجی:

– سیستم غیرخطی و متغیر با زمان $\mathbf{y}(t)=\mathbf{c}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)$

– سیستم خطی و نا متغیر با زمان(LTI) $\mathbf{y}(t)=C\mathbf{x}(t)+D\mathbf{u}(t)$

در این درس کلیه خروجی ها در دسترس و قابل اندازه گیری می باشند.

۱۹

یادآوری

حل معادلات حالت

برای سیستم LTI:

$$x(t)=\varphi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\varphi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\mathbf{x}(0)+(sI-A)^{-1}B\mathbf{u}(s)\right\}$$

۲۰

یادآوری

شرط کنترل پذیری حالت برای سیستم LTI:

$$\phi_c = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] \rightarrow \quad Nonsingula\ r$$

شرط رؤیت پذیری حالت برای سیستم LTI:

$$\phi_o = [C^T, A^T C^T, {A^T}^2 C^T, \ldots, {A^T}^{n-1} C^T] \rightarrow \quad Nonsingula\ r$$

فصل دوم: تابع معیار یا ارزشیابی عملکرد

مقدمه

- **آماده سازی یک مساله کنترل بهینه:**

۱. مدل سازی سیستم بصورت مشخص نمودن معادلات دینامیکی آن.
۲. مشخص نمودن و تعریف ریاضی محدودیت های فیزیکی.
۳. تعیین معیار عملکرد سیستم (مشخص نمودن تابع هزینه).

معیارهای متعارف برای سیستم های LTI و SISO

...

فصل دوم: تابع معیار یا ارزشیابی عملکرد

مقدمه

- **معیارهای متعارف برای سیستم های LTI و SISO**

حوزه زمان(پاسخ پله و شیب)	حوزه فرکانس
۱- زمان صعود(Rise Time)	۱- حد فاز (Phase Margin)
۲- زمان نشست (Settling Time)	۲- حد بهره (Gain Margin)
۳- در صد فراجهش(Overshoot)	۳- ماکزیمم دامنه
۴- خطای حالت ماندگار (steady state Error)	۴- پهنای باند

تابع معیار برای مسائل کنترل بهینه

یادآوری

هدف یافتن کنترل بهینه $\mathbf{u}^*$ به طوری که باعث شود سیستم

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = a(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

مسیر قابل قبول $\mathbf{x}^*$ را که باعث حداقل شدن تابع هزینه زیر می گردد را تعقیب نماید:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\,dt$$

۳

مسائل متعارف کنترل بهینه و توابع معیار آنها

۱- مسأله حداقل زمان

انتقال سیستمی از شرایط اولیه دلخواهی به یک مجموعه هدف در حداقل زمان

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

مثال:

- اتومبیل در فصل اول
- موشک ضد هواپیما
- چرخش رادار

مسائلی که زمان رسیدن به حالت نهایی دارای اهمیت است.

۴

مسائل متعارف کنترل بهینه و توابع معیار آنها

۲- مسأله کنترل وضعیت نهایی (خطای حالت ماندگار حداقل)

حداقل کردن انحراف وضعیت نهایی سیستم از مقدار مطلوب آن $\mathbf{r}(t_f)$. یک تابع معیار مناسب عبارت است از:

$$J=\sum_{i=1}^{n}[x_i(t_f)-r_i(t_f)]^2$$

- چرا از توان دو خطا برای تعریف تابع معیار استفاده شده است؟
- آیا می توان از قدرمطلق خطا برای تعریف تابع معیار استفاده نمود؟

۵

مسائل متعارف کنترل بهینه و توابع معیار آنها

۲- مسأله کنترل وضعیت نهایی (خطای حالت ماندگار حداقل)

بازنویسی تابع معیار

$$J=[\mathbf{x}(t_f)-\mathbf{r}(t_f)]^T[\mathbf{x}(t_f)-\mathbf{r}(t_f)]$$

$$J=\left\|\mathbf{x}(t_f)-\mathbf{r}(t_f)\right\|^2$$

تابع نرم $\|\cdot\|^2$ برای یک بردار عبارت است از مجموع توان دوی عناصر آن بردار(مشخص کننده توان و اندازه بردار).

۶

مسائل متعارف کنترل بهینه و توابع معیار آنها

۲- مسأله کنترل وضعیت نهایی (خطای حالت ماندگار حداقل)

وزن دهی یا Weighting تابع معیار

$$J = [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)]^T \mathbf{H}[\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)] = \left\| \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f) \right\|_{\mathbf{H}}^2$$

خصوصیات ماتریس H : متقارن، حقیقی و مثبت معین/نیمه معین

- **بوسیله این ماتریس امکان ارزش گزاری و تمایز در اهمیت ما بین حالت ها وجود خواهد داشت. همچنین امکان نرمالیزه نمودن پارامترها نیز وجود خواهد داشت.**

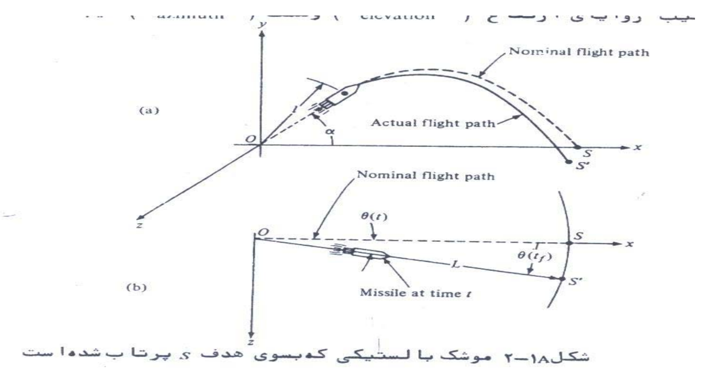
۷

مسائل متعارف کنترل بهینه و توابع معیار آنها

۲- مسأله کنترل وضعیت نهایی و *وزن دهی تابع معیار* (شکل ص۴۱)

$$J = h_{11}[l(t_f) - 5000]^2 + h_{22}[\theta(t_f)]^2 = \ldots$$

$$= [l(t_f) - 5000 \quad \theta(t_f)] \begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l(t_f) - 5000 \\ \theta(t_f) \end{bmatrix}$$



شکل۱۸-۲ موشک بالستیکی که بسوی هدف s پرتاب شده است

۸

مسائل متعارف کنترل بهینه و توابع معیار آنها

۲- مسأله کنترل وضعیت نهایی و وزن دهی تابع معیار

$$J = h_{11}[l(t_f) - 5000]^2 + h_{22}[\theta(t_f)]^2 = \dots$$

$$= [l(t_f) - 5000 \quad \theta(t_f)] \begin{bmatrix} h_{11} & 0 \\ 0 & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l(t_f) - 5000 \\ \theta(t_f) \end{bmatrix}$$

$h_{22} = (\frac{50}{0.01})^2 h_{11} \rightarrow$ **اهمیت یکسان در انحراف برد و سمت**

$h_{22} = h_{11} \rightarrow$ **نرمالیزه بودن متغیرهای زاویه سمت و برد نسبت به هم**

مسائل متعارف کنترل بهینه و توابع معیار آنها

۳- مساله حداقل تلاش کنترلی (Minimum Control Effort)

برای مداری با منبع ولتاژ و عناصر غیر ذخیره کننده انرژی، فرض کنید $u(t)$ منبع ولتاژ باشد و هدف کنترل با حداقل انرژی تلف شده باشد، آنگاه با توجه به ارتباط مستقیم جریان منبع با $u(t)$ برای حداقل نمودن انرژی تابع معیار عبارت خواهد بود از:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2(t)dt$$

در صورت داشتن چند منبع ورودی با ارزش گذاری متفاوت:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{u}^T(t) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Weighting Matrix} \\ (PD)}}{\mathbf{R}} \mathbf{u}(t)dt = \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{u}(t)\|_R^2 dt$$

مسائل متعارف کنترل بهینه و توابع معیار آنها

۴- مساله تعقیب (Tracking)

دست یافتن به حداقل فاصله ما بین وضعیت و/یا حالت $\mathbf{x}(t)$ و وضعیت مطلوب $\mathbf{r}(t)$ در محدوده زمان t_0 تا t_f :

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\left\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{r}(t)\right\|^2_{\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Weighting}\\ \text{Matrix(PSD)}}}{\mathbf{Q}(t)}}\,dt$$

اگر محدودیت روی سیگنال کنترل وجود داشته باشد ($|u_i(t)|\le\alpha$) رابطه فوق کافی است، ولیکن در صورت عدم وجود محدودیت رابطه فوق موجب حاصل شدن ورودی هایی غیر عملی به صورت ضربه یا مشتقات آن خواهد شد. به منظور جلوگیری از این اتفاق می توان از تابع معیار زیر سود جست:

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\left\|\mathbf{x}(t)-\mathbf{r}(t)\right\|^2_{\mathbf{Q}(t)}+\left\|\mathbf{u}(t)\right\|^2_{\mathbf{R}(t)}\,dt$$

۱۱

مسائل متعارف کنترل بهینه و توابع معیار آنها

۵- مساله تنظیم کننده ها (Regulators)

در صورتی که در مسأله تعقیب $\mathbf{r}(t)=0$ باشد مساله تعقیب به مساله تنظیم کننده تبدیل می گردد.

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\left\|x(t)\right\|^2 dt$$

۱۲

انتخاب تابع معیار

هدف از انتخاب تابع معیار:

ارائه یک تابع ریاضی به صورتی که حداقل شدن مقدار آن تابع نشان دهنده آن باشد که سیستم در مطلوب ترین وضعیت عمل می نماید.

مثال (فرود هواپیما بر روی عرشه کشتی) ص ۵۳:

α : زاویه حمله

θ : زاویه اوج

γ : زاویه مسیر پرواز (بسیار کوچک فرض شده است.)

h : ارتفاع سطح پرواز از عرشه کشتی

مثال (فرود هواپیما بر روی عرشه کشتی) ص ۵۳:

- معالات حاکم بر سیستم:

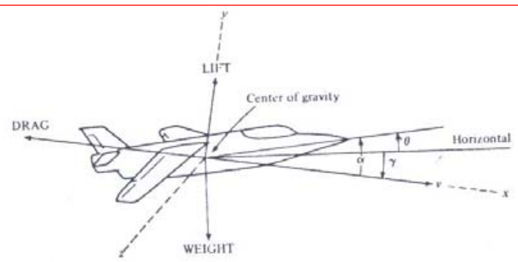
سرعت ثابت □□□ ۱۶۰ یا ۲۳۰۰□□/□□□

شکل (۸-۲)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

$$x_1 = h,\quad x_2 = \dot{h},\quad x_3 = \theta,\quad x_4 = \dot{\theta}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix};\qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix}$$



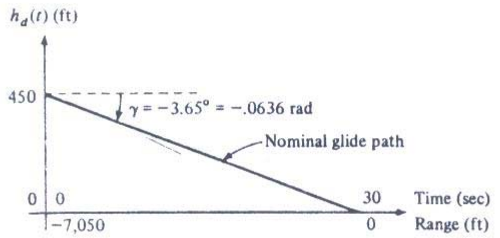
شکل ۸–۲ محورها و زوایای هواپیما

مثال (فرود هواپیما بر روی عرشه کشتی) ص ۵۶:

- مسیر فرود متعارف:

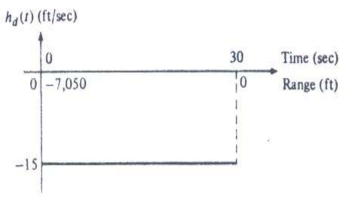
ارتفاع ۴۵۰ فوتی و فاصله ۷۰۵۰ فوتی از کشتی در نتیجه حدود ۳۰ ثانیه مدت زمان فرود به طول خواهد انجامید.

- زاویه اوج مطلوب: ۵ درجه

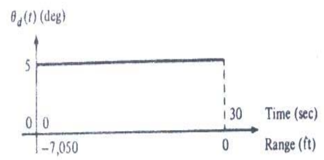


شکل ۱۰-۲ منحنی ارتفاع مطلوب

مثال (فرود هواپیما بر روی عرشه کشتی) ص ۵۶:



شکل ۱۱ - ۲ منحنی مطلوب تغییرات ارتفاع



شکل ۱۲-۲ پروفیل زاویه مطلوب

شکل ۱۳ - ۲ پروفیل تغییرات وضع مطلوب

مثال (فرود هواپیما بر روی عرشه کشتی) ص ۵۷و ۵۸:

$$J = k_h[h(30) - h_d(30)]^2 + k_{\dot h}[\dot h(30) - \dot h_d(30)]^2 + k_\theta[\theta(30) - \theta_d(30)]^2$$
$$+ \int_0^{30} \{q_h(\tau)[h(\tau) - h_d(\tau)]^2 + q_{\dot h}(\tau)[\dot h(\tau) - \dot h_d(\tau)]^2 \qquad (۲\cdot۳-۳)$$
$$+ q_\theta(\tau)[\theta(\tau) - \theta_d(\tau)]^2 + q_{\dot\theta}(\tau)[\dot\theta(\tau) - \dot\theta_d(\tau)]^2$$
$$+ r_{\delta_e}(\tau)[\delta_e(\tau) - \delta_{e_d}(\tau)]^2\}\, d\tau,$$

$$J = k_h[h(30)]^2 + k_{\dot h}[\dot h(30) + 15]^2 + k_\theta[\theta(30) - 0.0873]^2$$
$$+ \int_0^{30} \{q_h(\tau)[h(\tau) - 450 + 15\tau]^2 + q_{\dot h}(\tau)[\dot h(\tau) + 15]^2 \qquad (۲\cdot۳-۴)$$
$$+ q_\theta(\tau)[\theta(\tau) - 0.0873]^2 + q_{\dot\theta}(\tau)[\dot\theta(\tau)]^2$$
$$+ r_{\delta_e}(\tau)[\delta_e(\tau)]^2\}\, d\tau,$$

۱۷

فصل سوم: برنامه ریزی پویا

مقدمه

- پس از تعیین تابع معیار برای یک سیستم نوبت به **تعیین تابع کنترل** می رسد که این تابع را **حداقل** نماید.
  - دو روش حداقل یابی
    - برنامه ریزی پویای بلمن (استفاده از کامپیوتر دیجیتال در حل مساله)
    - اصل حداقل یابی پونتریاگین

اصل بهینگی

اصل بهینگی (بهینه یابی)

یک سیاست بهینه دارای این خاصیت است که شرایط اولیه و/یا تصمیم گیری اولیه هرچه باشد, تصمیم گیری باقی مانده نیز باید یک سیاست بهینه را با توجه به حالت ایجاد شده از تصمیم گیری بسازد.

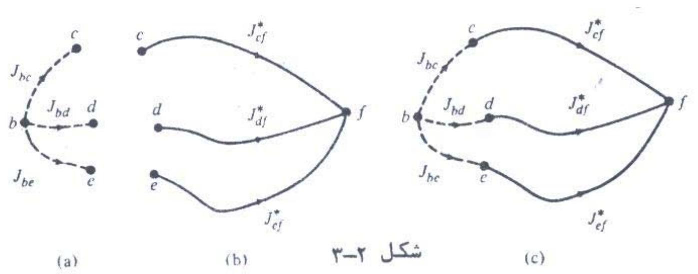
– به عنوان مثال:

(b) دو مسیر بهینه ممکن از b به e

(a) مسیر بهینه از a به e

شکل ۱–۳

کاربرد اصل بهینگی در تصمیم گیری(شکل۲-۳ ص ۶۷)

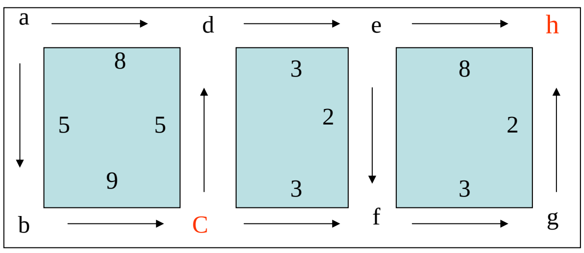


شکل ۲-۳

برنامه ریزی پویا یک روش محاسباتی است که با تصمیمات متوالی یک سیاست و مسیر بهینه را معین می کند

3

برنامه ریزی پویا و مساله مسیر بهینه



هدف: رسیدن به نقطه h از هر حالت اولیه.

- فقط امکان حرکت در یک جهت.
- وضعیت: هر تقاطع
- تصمیم: انتخاب جهت

4

برنامه ریزی پویا و مساله مسیر بهینه

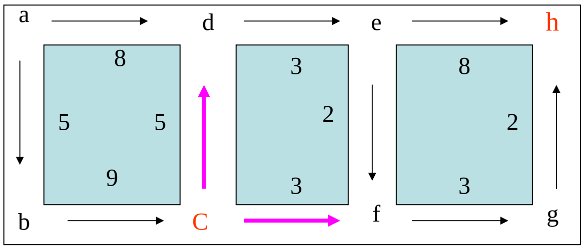
فرض: شرایط اولیه C

$C^*_{cdh} = J_{cd} + J^*_{dh} = 5 + 10 = 15$

$C^*_{cfh} = J_{cf} + J^*_{fh} = 3 + 5 = 8$

$\Rightarrow \quad J^*_{ch} = \min\{C^*_{cdh}, C^*_{cfh}\} = \min\{15, 8\} = 8$

در نتیجه تصمیم بهینه در c رفتن به f خواهد بود.



5

برنامه ریزی پویا و مساله مسیر بهینه

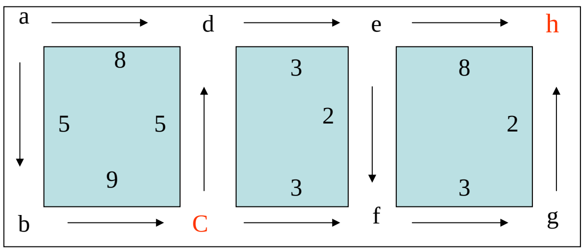
لذا مساله جدید: یافتن J^*_{fh} یا J^*_{dh}

$J^*_{fh} = J_{fg} + J^*_{gh} = 3 + 2 = 5$

در نتیجه لازم است از انتها (مقصد) به سمت نقطه شروع حرکت کنیم.

$J^*_{eh} = \min\{J_{eh}, [J_{ef} + J^*_{fh}]\}$

$\vdots$



6

برنامه ریزی پویا و مساله مسیر بهینه: روش کلی

قراردادها:

- α : وضعیت فعلی (تقاطع)
- u_i : تصمیم مجاز(کنترل) در وضعیت α, $\quad i = \underset{N}{\underset{\downarrow}{1}},\ \underset{E}{\underset{\downarrow}{2}},\ \underset{S}{\underset{\downarrow}{3}},\ \underset{W}{\underset{\downarrow}{4}}$
- x_i : وضعیت (تقاطع) مجاور α با اعمال u_i .
- h : وضعیت نهایی.

- $J_{\alpha x_i}$: مقدار تابع هزینه برای حرکت از α به x_i
- $J^*_{x_i h}$: حداقل هزینه برای رسیدن به حالت نهایی از x_i
- $C^*_{\alpha x_i h}$: حداقل هزینه برای رفتن از α به h از طریق x_i
- $J^*_{\alpha h}$: حداقل هزینه برای رفتن از α به h از هر مسیر مجاز
- $u^*(\alpha)$: تصمیم بهینه (کنترل) در α.

7

حل مساله مسیر بهینه با استفاده از برنامه ریزی پویا

برنامه‌ریزی پویا /۷۱

Current intersection α	Heading u_i	Next intersection x_i	Minimum cost from α to h via x_i $J_{\alpha x_i} + J^*_{x_i h} = C^*_{\alpha x_i h}$	Minimum cost to reach h from α $J^*_{\alpha h}$	Optimal heading at α $u^*(\alpha)$
g	N	h	$2 + 0 = 2$	2	N
f	E	g	$3 + 2 = 5$	5	E
e	E	h	$8 + 0 = 8$		
	S	f	$2 + 5 = 7$	7	S
d	E	e	$3 + 7 = 10$	10	E
c	N	d	$5 + 10 = 15$		
	E	f	$3 + 5 = 8$	8	E
b	E	c	$9 + 8 = 17$	17	E
a	E	d	$8 + 10 = 18$	18	E
	S	b	$5 + 17 = 22$		

جدول ۱–۳ محاسبه جهت یابی بهینه با استفاده از برنامه ریزی پویا

۳-۵- سیستم کنترل بهینه

Q1: How can solve the Differential Equation using D.P.?

$$sys: \quad \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

$$Cons.: \quad 0 \le x(t) \le 1.5$$
$$-1 \le u(t) \le 1$$

$$Cost \quad function: \quad J = x^2(T) + \lambda \int_0^T u^2(t)dt$$

9

۳-۵- سیستم کنترل بهینه

Q1: How can solve the Differential Equation using D.P.?

$$sys: \quad \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

R1: Change ***Differential Eq.*** to ***Difference Eq.***

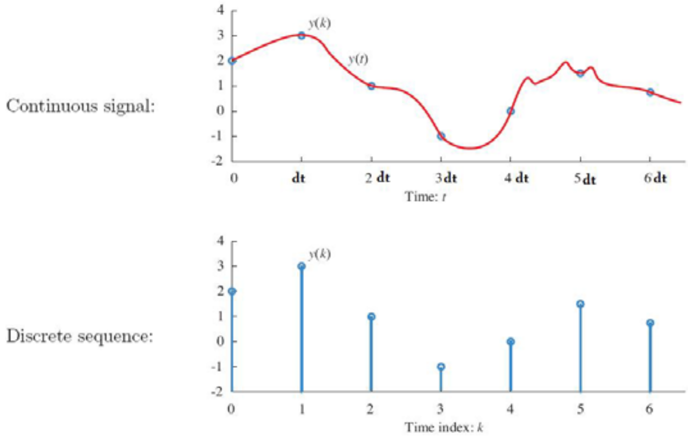
$$\text{Difference Eq.:} \quad \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = ax(t) + bu(t)$$

10

۳-۵- سیستم کنترل بهینه

Difference Eq.: ???

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=ax(t)+bu(t)$$



11

۳-۵- سیستم کنترل بهینه

Difference Eq.: ???

$$x(t+\Delta t)=(1+a.\Delta t).x(t)+b.\Delta t.u(t)$$

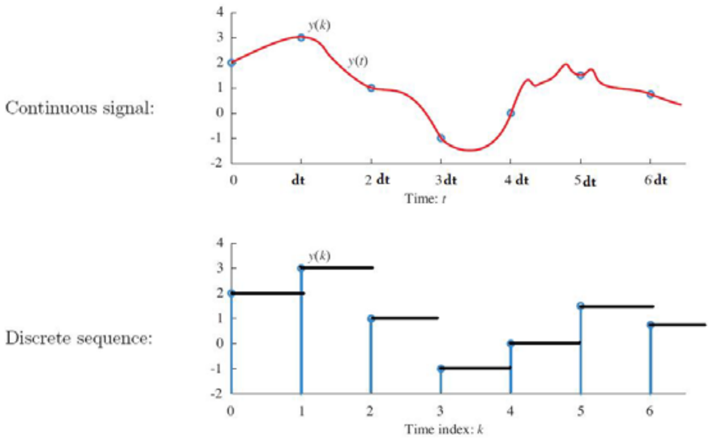
if : $t=k.\Delta t$ then :

$$x([k+1].\Delta t)=(1+a.\Delta t)x(k.\Delta t)+b.\Delta t.u(k\Delta t),\quad k=0,1,\ldots,N$$

$$x(k+1)=(1+a.\Delta t)x(k)+b.\Delta t.u(k),\quad k=0,1,\ldots,N$$

12

۳-۵- سیستم کنترل بهینه



$$J = x^2(N\Delta t) + \lambda\left[\int_0^{\Delta t} u^2(0)dt + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} u^2(\Delta t)dt + \cdots + \int_{(N-1)\Delta t}^{N\Delta t} u^2((N-1)\Delta t)dt\right]$$

13

۳-۵- سیستم کنترل بهینه

$$J = x^2(N\Delta t) + \lambda.\Delta t\left[u^2(0) + u^2(1) + \cdots + u^2(N-1)\right]$$

↓

$$\boxed{J = x^2(N) + \lambda.\Delta t\sum_{k=0}^{N-1} u^2(k)}$$

14

۳-۵- سیستم کنترل بهینه

- مثال:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ \Delta t = 1 \\ T = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(k+1) = x(k) + u(k) \qquad k = 0,1 \\ J = x^2(2) + 2u^2(0) + 2u^2(1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le x(k) \le 1.5 \qquad k = 0,1,2 \\ -1 \le u(k) \le 1 \qquad k = 0,1 \end{cases}$$

کوانتیزه نمودن مقادیر ورودی و حالت ها:

$$x(k) = 0, \quad 0.5, \quad 1.0, \quad 1.5$$

$$u(k) = -1, \quad -0.5, \quad 0, \quad 0.5, \quad 1$$

۳-۵- سیستم کنترل بهینه

- مثال:

Current state $x(1)$	Control $u(1)$	Next state $x(2) = x(1) + u(1)$	Cost $x^2(2) + 2u^2(1) = J_{12}(x(1), u(1))$	Minimum cost $J^*_{12}(x(1))$	Optimal control applied at $k = 1$ $u^*(x(1), 1)$
1.5	0.0	1.5	$(1.5)^2 + 2(0.0)^2 = 2.25$		
	−0.5	1.0	$(1.0)^2 + 2(-0.5)^2 = 1.50$	$J^*_{12}(1.5) = 1.50$	$u^*(1.5, 1) = -0.5$
	−1.0	0.5	$(0.5)^2 + 2(-1.0)^2 = 2.25$		
1.0	0.5	1.5	$(1.5)^2 + 2(0.5)^2 = 2.75$		
	0.0	1.0	$(1.0)^2 + 2(0.0)^2 = 1.00$		
	−0.5	0.5	$(0.5)^2 + 2(-0.5)^2 = 0.75$	$J^*_{12}(1.0) = 0.75$	$u^*(1.0, 1) = -0.5$
	−1.0	0.0	$(0.0)^2 + 2(-1.0)^2 = 2.00$		
0.5	1.0	1.5	$(1.5)^2 + 2(1.0)^2 = 4.25$		
	0.5	1.0	$(1.0)^2 + 2(0.5)^2 = 1.50$		
	0.0	0.5	$(0.5)^2 + 2(0.0)^2 = 0.25$	$J^*_{12}(0.5) = 0.25$	$u^*(0.5, 1) = 0.0$
	−0.5	0.0	$(0.0)^2 + 2(-0.5)^2 = 0.50$		
0.0	1.0	1.0	$(1.0)^2 + 2(1.0)^2 = 3.00$		
	0.5	0.5	$(0.5)^2 + 2(0.5)^2 = 0.75$		
	0.0	0.0	$(0.0)^2 + 2(0.0)^2 = 0.00$	$J^*_{12}(0.0) = 0.00$	$u^*(0.0, 1) = 0.0$

جدول ۲-۳ هزینه‌های عملکرددرآخرین مرحله

۳-۵- سیستم کنترل بهینه

- مثال:

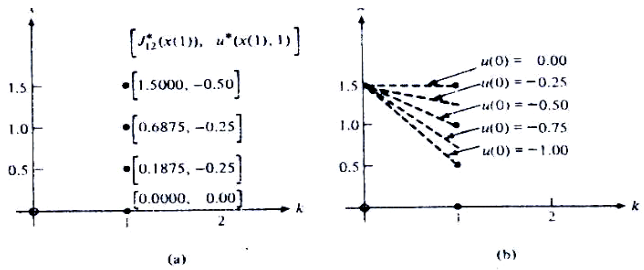
Current state $x(0)$	Control $u(0)$	Next state $x(1) = x(0) + u(0)$	Minimum cost over last two stages for trial value $u(0)$ $J_{01}(x(0), u(0)) + J^*_{12}(x(1)) = 2u^2(0) + J^*_{12}(x(1)) = C^*_{02}(x(0), u(0))$	Minimum cost over last two stages $J^*_{02}(x(0))$	Optimal control applied at $k = 0$ $u^*(x(0), 0)$
1.5	0.0	1.5	$2(0.0)^2 + 1.50 = 1.50$		
	−0.5	1.0	$2(-0.5)^2 + 0.75 = 1.25$	$J^*_{02}(1.5) = 1.25$	$u^*(1.5, 0) = -0.5$
	−1.0	0.5	$2(-1.0)^2 + 0.25 = 2.25$		
1.0	0.5	1.5	$2(0.5)^2 + 1.50 = 2.00$		
	0.0	1.0	$2(0.0)^2 + 0.75 = 0.75$	$J^*_{02}(1.0) = \begin{Bmatrix} 0.75 \\ 0.75 \end{Bmatrix}$	$u^*(1.0, 0) = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$
	−0.5	0.5	$2(-0.5)^2 + 0.25 = 0.75$		
	−1.0	0.0	$2(-1.0)^2 + 0.00 = 2.00$		
0.5	1.0	1.5	$2(1.0)^2 + 1.50 = 3.50$		
	0.5	1.0	$2(0.5)^2 + 0.75 = 1.25$		
	0.0	0.5	$2(0.0)^2 + 0.25 = 0.25$	$J^*_{02}(0.5) = 0.25$	$u^*(0.5, 0) = 0.0$
	−0.5	0.0	$2(-0.5)^2 + 0.00 = 0.50$		
0.0	1.0	1.0	$2(1.0)^2 + 0.75 = 2.75$		
	0.5	0.5	$2(0.5)^2 + 0.25 = 0.75$		
	0.0	0.0	$2(0.0)^2 + 0.00 = 0.00$	$J^*_{02}(0.0) = 0.00$	$u^*(0.0, 0) = 0.0$

جدول ۳-۳ هزینه‌های عملکرد دو مرحله آخر

۳-۶- میان یابی

- در صورتی که مقادیر حالت سیستم در هر مرحله توسط مقادیر قانون کنترل به مقادیر کوانتیزه شده حالت منجر نگردد به منظور دست یافتن به مقدار عددی تابع هزینه در مقدار حالت جدید نیازمند **میان یابی** خواهیم بود. (شکل ۴-۳)

$$\begin{cases} x(2) = x(1) + u(1) = 1 + (-0.25) = 0.75 \\ J^*_{12}(x(1)) = 0.75^2 + 2\times(-0.25)^2 = 0.6875 \end{cases}$$



شکل ۴-۳ (a) حداقل هزینه و کنترلهای بهینه برای مقادیر کوانتیزه شده $x(1)$. (b) مسیرهای بدست آمده در اثر اعمال مقادیر کوانتیزه شده کنترل در $x(0) = 1.5$.

۳-۶- میان یابـــی (ادامه- جدول ۴-۳)

$$J_{12}^{*}(1.25) = 0.6875 + \frac{1}{2}[1.5 - 0.6875] = 1.09375$$

$$J_{12}^{*}(0.75) = 0.1875 + \frac{1}{2}[0.6875 - 0.1875] = 0.4375$$

Current state $x(0)$	Control $u(0)$	Next state $x(1) = x(0) + u(0)$	Minimum cost over last two stages for trial value $u(0)$ $J_{01}(x(0), u(0)) + J_{12}^{*}(x(1)) = 2u^2(0) + J_{12}^{*}(x(1)) = C_{02}^{*}(x(0), u(0))$	Minimum cost over last two stages $J_{02}^{*}(x(0))$	Optimal control applied at $k = 0$ $u^{*}(x(0), 0)$
1.50	0.00	1.50	$2(0.00)^2 + 1.50000 = 1.50000$		
	−0.25	1.25	$2(-0.25)^2 + 1.09375 = 1.21875$		
	−0.50	1.00	$2(-0.50)^2 + 0.68750 = 1.18750$	$J_{02}^{*}(1.5) = 1.18750$	$u^{*}(1.5, 0) = -0.$
	−0.75	0.75	$2(-0.75)^2 + 0.43750 = 1.56250$		
	−1.00	0.50	$2(-1.00)^2 + 0.18750 = 2.18750$		

۳-۷- رابطه توالی برنامه ریزی پویا (بازنویسی روابط در حالت کلی)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$J = h(\mathbf{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$where, \qquad \mathbf{u} \in U$$

- با گسسته سازی:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t.\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\rightarrow \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \Delta t.\mathbf{a}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \qquad (3.7-5)$$

$$\boxed{\rightarrow \mathbf{x}(k+1) \overset{\Delta}{=} \mathbf{a}_D(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \qquad (3.7-6)}$$

20

۳-۷- رابطه توالی برنامه ریزی پویا (بازنوسی روابط در حالت کلی)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$J = h(\mathbf{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$where, \qquad \mathbf{u} \in U$$

تاثیر گسسته سازی بر تابع هزینه:

$$J = h(\mathbf{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = h(\mathbf{x}(N)) + \int_0^{\Delta t} g dt + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} g dt + \cdots + \int_{(N-1)\Delta t}^{N\Delta t} g dt \qquad (3.7-7)$$

در صورتی که دوره تناوب نمونه برداری به اندازه کافی کوچک باشد:

$$J = h(\mathbf{x}(N)) + \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g(x(k), u(k))$$

$$\Rightarrow J = h(\mathbf{x}(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} g_D(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

21

۳-۷- رابطه توالی برنامه ریزی پویا (نحوه تعیین قانون کنترل)

$$\rightarrow \mathbf{x}(k+1) \overset{\Delta}{=} \mathbf{a}_D(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \qquad (3.7-6)$$

$$\Rightarrow J = h(\mathbf{x}(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} g_D(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \qquad (3.7-8a)$$

مراحل تعیین قانون کنترل:

$$S.0: \quad J_{N,N}(\mathbf{x}(N)) \overset{\Delta}{=} h(x(N))$$

$$S.1: \quad J_{N-1,N}(\mathbf{x}(N-1), \mathbf{u}(N-1)) \overset{\Delta}{=} g_D(\mathbf{x}(N-1), \mathbf{u}(N-1)) + \underbrace{h(x(N))}_{J_{N,N}(\mathbf{x}(N))}$$

$$J_{N-1,N}(\mathbf{x}(N-1), \mathbf{u}(N-1)) \overset{\Delta}{=} g_D(\mathbf{x}(N-1), \mathbf{u}(N-1)) + J_{N,N}(\mathrm{a}_D(\mathbf{x}(N-1), \mathbf{u}(N-1)))$$

22

۳-۷- رابطه توالی برنامه ریزی پویا (نحوه تعیین قانون کنترل)

در نتیجه هزینه بهینه عبارت است از:

$$J^*_{N-1,N}(\mathbf{x}(N-1)) \stackrel{\Delta}{=} \min_{u(N-1)} \{g_D(\mathbf{x}(N-1),\mathbf{u}(N-1)) + J_{N,N}(a_D(\mathbf{x}(N-1),\mathbf{u}(N-1)))\}$$

$$\text{Optimal Control}: \ \mathbf{u}^*(x(N-1), N-1)$$

$$S.2: \quad J_{N-2,N}(\mathbf{x}(N-2),\mathbf{u}(N-2),\mathbf{u}(N-1))$$
$$= g_D(\mathbf{x}(N-2),\mathbf{u}(N-2)) + g_D(\mathbf{x}(N-1),\mathbf{u}(N-1)) + h(\mathbf{x}(N))$$
$$= g_D(\mathbf{x}(N-2),\mathbf{u}(N-2)) + J_{N-1,N}(\mathbf{x}(N-1),\mathbf{u}(N-1))$$

$$J^*_{N-2,N}(\mathbf{x}(N-2)) \stackrel{\Delta}{=} \min_{u(N-2),u(N-1)} \{g_D(\mathbf{x}(N-2),\mathbf{u}(N-2)) + J_{N-1,N}(a_D(\mathbf{x}(N-1),\mathbf{u}(N-1)))\}$$

با توجه به اصل بهینگی:

$$J^*_{N-2,N}(\mathbf{x}(N-2)) \stackrel{\Delta}{=} \min_{u(N-2)} \left\{ g_D(\mathbf{x}(N-2),\mathbf{u}(N-2)) + J^*_{N-1,N}(\underbrace{\mathbf{x}(N-1)}_{a_D(X(n-2),U(N-2))}) \right\}$$

۳-۷- رابطه توالی برنامه ریزی پویا (نحوه تعیین قانون کنترل)

لذا برای پروسه k مرحله ای:

$$J^*_{N-k,N}(\mathbf{x}(N-2)) \stackrel{\Delta}{=} \min_{u(N-k)} \left\{ g_D(\mathbf{x}(N-k),\mathbf{u}(N-k)) + J^*_{N-(k-1),N}(\underbrace{\mathbf{x}(N-(k-1))}_{a_D(X(n-k),U(N-k))}) \right\}$$

برای یک پروسه چند مرحله ای ابتدا با یک پروسه صفر مرحله ای اغاز نموده و سپس به پروسه یک مرحله ای , دو مرحله ای و .... خواهیم رسید.

۳-۸-روش محاسباتی برای حل مسأله کنترل بهینه (جمع بندی)

حل مساله بر اساس روش برنامه ریزی پویا)

۱- مدل گسسته سیستم مشخص گردد:

$$\mathbf{x}(k+1) = a_D(x(k), u(k)); \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

۲- تابع معیار مشخص گردد (هدف یافتن قانون کنترلی است که این تابع هزینه را مینیمم نماید):

$$J = h(\mathbf{x}(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} g_D(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \qquad (3.8-2)$$

۳- با استفاده از برنامه ریزی پویا و معادله برگشتی (توالی) قانون کنترل بهینه محاسبه گردد:

$$J^*_{N-k,N}(\mathbf{x}(N-2)) \overset{\Delta}{=} \min_{u(N-k)} \left\{ g_D(\mathbf{x}(N-k), \mathbf{u}(N-k)) + J^*_{N-(k-1),N}(\underbrace{\mathbf{x}(N-(k-1))}_{a_D(X(N-k),U(N-k))}) \right\}$$

۴- قانون کنترل بهینه :

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(N-k), N-k); \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

۳-۸- روش محاسباتی برای حل مسأله کنترل بهینه (ادامه)

تنها نکته باقیمانده:

نحوه تقسیم بندی مقادیر وضعیت ها و کنترل ها به تعداد محدودی مقادیر کوانتیزه است بر اساس محدودیت های آنها.

به عنوان مثال برای یک سیستم با n متغیر حالت (وضعیت):

$$\underset{\text{integer}}{\underset{\downarrow}{s_r}} = \frac{x_{r\max} - x_{r\min}}{\Delta x_r} + 1 \qquad r = 1,2,\cdots,n$$

$$S = s_1.s_2.\cdots.s_n \qquad \text{for } t = k\Delta t$$

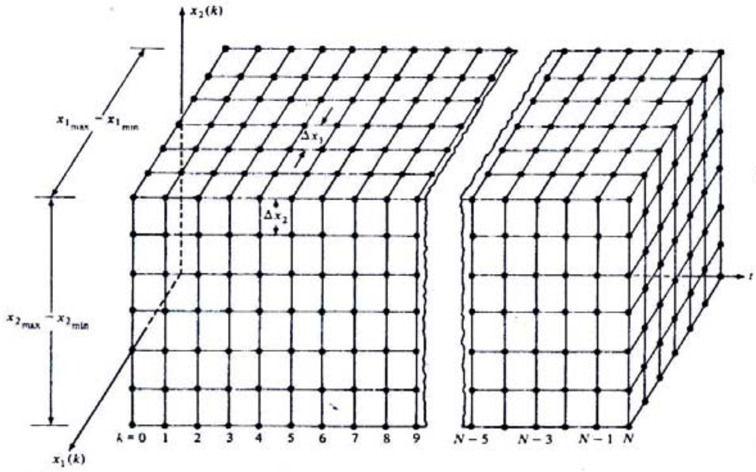
همچنین برای یک سیستم با m ورودی یا قانون کنترل:

$$\underset{\text{integer}}{\underset{\downarrow}{C_q}} = \frac{u_{q\max} - u_{q\min}}{\Delta u_q} + 1 \qquad q = 1,2,\cdots,m$$

$$C = c_1.c_2.\cdots.c_m$$

۳-۸- روش محاسباتی برای حل مسأله کنترل بهینه (ادامه)

برای یک سیستم مرتبه دوم شکل زیر (۵-۳) روشن کننده ویژگی مسأله خواهد بود:



$$c_q = \frac{u_{q_{max}} - u_{q_{min}}}{\Delta u_q} + 1; \quad q = 1, 2, \ldots, m \qquad (۳.۸-۹)$$

شکل ۵-۳ شبکه مقادیر وضعیتهای قابل قبول

27

۳-۸- روش محاسباتی برای حل مسأله کنترل بهینه (ادامه)

نحوه برنامه نویسی مطالعه گردد.

$k=1$

$i=1 \rightarrow \mathbf{x}^i(N-k)$

$j=1,2,\cdots,C \rightarrow \mathbf{u}^j(N-k)$

$\downarrow$

$\mathbf{x}^{(i,j)}(N-k+1)$ → $J^*_{N-(k-1)}\left(x^{(i,j)}(N-k+1)\right)$

$\mathbf{x}^{(i,j)}(N-k+1)$ → Interpolation

$\downarrow$

$C^*_{N-k,N}\left(\mathbf{x}^{(i)}(N-k),\mathbf{u}^{(i)}(N-k)\right)$

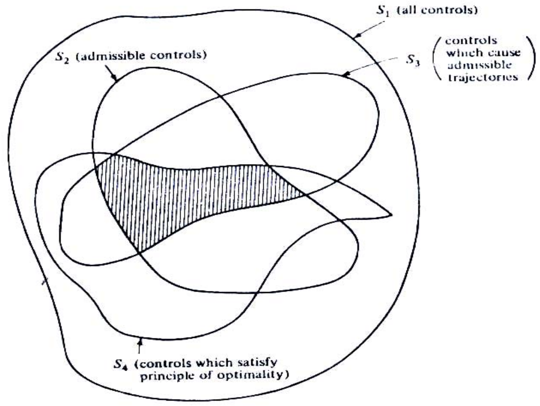
$i=i+1$

28

$k=k+1$

۳-۹- مشخصات پاسخ برنامه ریزی پویا

- منجر به حداقل مطلق (*Global Minimum*)می گردد, چرا که از جستجوی مستقیم استفاده می گردد. در این راه جستجو بر اساس تمامی کنترل ها صورت نمی پذیرد بلکه بر اساس استفاده از اصل بهینگی انجام می پذیرد (شکل ۷-۳).



29

شکل ۷–۳ زیرمجموعه‌های فضای کنترل

۳-۹- مشخصات پاسخ برنامه ریزی پویا

- حضور محدودیت ها موجب ساده تر شدن حل مسأله می گردد.
- کنترل حاصل از پاسخ برنامه ریزی پویا یک کنترل حلقه بسته است. $\mathbf{u}^* = \mathrm{f}(\mathbf{x}(t), t)$
- حجم محاسبات به نسبت عدد گذاری مستقیم کاهش یافته است(مثال: یک سیستم مرتبه اول با ۱۰ مقدار کوانتیزه شده در وضعیت و ۴ مقدار در کنترل جدول (۵-۳)).
- مشکل ابعاد و افزایش نیاز به حافظه در مسائل با ابعاد بزرگ.

Number of stages in the process N	Number of calculations required by dynamic programming	Number of calculations required by direct enumeration	Number of calculations required by direct enumeration (assuming 50% of state values admissible and distinct)
1	40	40	40
2	80	200	120
3	120	840	280
4	160	3,400	600
5	200	13,640	1,240
6	240	54,600	2,520
L	$40L$	$\sum_{k=1}^{L}[10 \cdot 4^k]$	$\sum_{k=1}^{L}[20 \cdot 2^k]$

30

جدول ۵–۳ یک مثال مقایسه برنامه‌ریزی پویا و عددگذاری مستق

۳-۱۰- نتایج تحلیلی-تنظیم کننده خطی

$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k)$ ***(There is no constraint on states and controls)***

Cost Function : $J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N)\mathbf{H}\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k)]$

$\mathbf{H}, \mathbf{Q}$: Symmetric, P.S.D

$\mathbf{R}$: Symmetric, P.D.

Step 0 : $J_{NN} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N)\mathbf{H}\mathbf{x}(N)$

Step 1 : $J_{N-1,N}(\mathbf{x}(N-1), \mathbf{u}(N-1)) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N-1)\mathbf{Q}\mathbf{x}(N-1) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T(N-1)\mathbf{R}\mathbf{u}(N-1)$

31

۳-۱۰- نتایج تحلیلی-تنظیم کننده خطی (ادامه)

$$J_{N-1,N}(\mathbf{x}(N-1), \mathbf{u}(N-1)) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N-1)\mathbf{Q}\mathbf{x}(N-1) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T(N-1)\mathbf{R}\mathbf{u}(N-1)$$

با توجه به نبود محدودیت روی کنترل ها لازم است مشتق گرفته شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_1(N-1)} \\ \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_2(N-1)} \\ \vdots \\ \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_m(N-1)} \end{bmatrix} \triangleq \frac{\partial J_{N-1,N}}{\partial \mathbf{u}(N-1)} = 0 \Longrightarrow \mathbf{R}\mathbf{u}(N-1) + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(0)[\mathbf{A}\mathbf{x}(N-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(N-1)] = 0 \quad (3.10\text{-}8)$$

لازم است به منظور تحلیل پاسخ (نوع اکسترمم)
این معادله, مشتق دوم بررسی و تحلیل گردد.

32

۳-۱۰- نتایج تحلیلی-تنظیم کننده خطی (ادامه)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_1^2(N-1)} & \dfrac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_1(N-1)\partial u_2(N-1)} & \cdots & \dfrac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_1(N-1)\partial u_m(N-1)} \\ \dfrac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_2(N-1)\partial u_1(N-1)} & \dfrac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_2^2(N-1)} & \cdots & \dfrac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_2(N-1)\partial u_m(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_m(N-1)\partial u_1(N-1)} & \dfrac{\partial J_{N-1,N}}{\partial u_m(N-1)\partial u_2(N-1)} & \cdots & \dfrac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial u_m^2(N-1)} \end{bmatrix} \triangleq \frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial \mathbf{u}^2(N-1)}$$

$$\frac{\partial^2 J_{N-1,N}}{\partial \mathbf{u}^2(N-1)} = \mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}(0)\mathbf{B} \quad : \ P.D.$$

در نتیجه پاسخ معادله (۸-۳.۱۰) مینیمم مطلق تابع هزینه متناظر خواهد بود:

$$\mathbf{u}^*(N-1) = -(\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}(0)\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(0)\mathbf{A}\mathbf{x}(N-1) \triangleq \mathbf{F}(N\text{-}1)\mathbf{x}(N\text{-}1) \qquad (3.10\text{-}10)$$

33

۳-۱۰- نتایج تحلیلی-تنظیم کننده خطی (ادامه)

$$\mathbf{u}^*(N-1) = -(\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}(0)\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(0)\mathbf{A}\mathbf{x}(N-1) \triangleq \mathbf{F}(N\text{-}1)\mathbf{x}(N\text{-}1) \qquad (3.10\text{-}10)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} J^*_{N-1,N}(x(N-1)) &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N-1)\{[\mathbf{A}+\mathbf{BF}(N-1)]^T\mathbf{P}(0)[\mathbf{A}+\mathbf{BF}(N-1)] \\ &\quad + \mathbf{F}^T(N-1)\mathbf{RF}(N-1)+\mathbf{Q}\}\mathbf{x}(N-1) \\ &\triangleq \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N-1)\mathbf{P}(1)\mathbf{x}(N-1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(1) = [\mathbf{A}+\mathbf{BF}(N-1)]^T\mathbf{P}(0)[\mathbf{A}+\mathbf{BF}(N-1)] + \mathbf{F}^T(N-1)\mathbf{RF}(N-1)+\mathbf{Q}$$

همچنین در صوت برگشت به یک مرحله قبل:

$$\mathbf{u}^*(N-2) = -(\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}(1)\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(1)\mathbf{A}\mathbf{x}(N-2) \triangleq \mathbf{F}(N\text{-}2)\mathbf{x}(N\text{-}2) \qquad (3.10\text{-}12)$$

34

۳-۱۰- نتایج تحلیلی-تنظیم کننده خطی (ادامه)

در حالت کلی برای یک سیستم خطی متغیر با زمان گسسته و برای کنترل به صورت تنظیم کننده خطی :

یادآور
فیدبک حالت

$$\mathbf{u}^*(N-k) = -[\mathbf{R}(N-k)+\mathbf{B}^T(N-k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{B}(N-k)]^{-1}$$
$$\mathbf{B}^T(N-k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}(N-k)\mathbf{x}(N-k)$$
$$\triangleq \mathbf{F}(N\text{-}k)\mathbf{x}(N\text{-}k) \qquad (3.10\text{-}16)$$

35

۳-۱۰- نتایج تحلیلی-تنظیم کننده خطی (ادامه)

$$J^*_{N-k,N}(x(N-1)) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N-k)\{[\mathbf{A}(N-k)+\mathbf{B}(N-k)\mathbf{F}(N-1)]^T$$
$$\mathbf{P}(k-1)[\mathbf{A}(N-k)+\mathbf{B}(N-k)\mathbf{F}(N-k)]$$
$$+\mathbf{F}^T(N-k)\mathbf{R}(N-k)\mathbf{F}(N-k)+\mathbf{Q}(N-k)\}\mathbf{x}(N-k)$$
$$\triangleq \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(N-k)\mathbf{P}(k)\mathbf{x}(N-k) \qquad (3.10\text{-}17)$$

در نتیجه به منظور پیاده سازی کامپیوتری:

$$\mathbf{F}(N-k) = -[\mathbf{R}(N-k)+\mathbf{B}^T(N-k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{B}(N-k)]^{-1}$$
$$\mathbf{B}^T(N-k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{A}(N-k) \qquad (3.10\text{-}19)$$

$$\mathbf{P}(k) = [\mathbf{A}(N-k)+\mathbf{B}(N-k)\mathbf{F}(N-1)]^T\mathbf{P}(k-1)$$
$$[\mathbf{A}(N-k)+\mathbf{B}(N-k)\mathbf{F}(N-k)]$$
$$+\mathbf{F}^T(N-k)\mathbf{R}(N-k)\mathbf{F}(N-k)+\mathbf{Q}(N-k) \qquad (3.10\text{-}20)$$

36

۳-۱۰- نتایج تحلیلی-تنظیم کننده خطی (ادامه)

مثال (۱-۳.۱۰):

$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0.9974 & 0.0539\\ -0.1078 & 1.1591\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix}0.0013\\ 0.0539\end{bmatrix}\mathbf{u}(k)$$

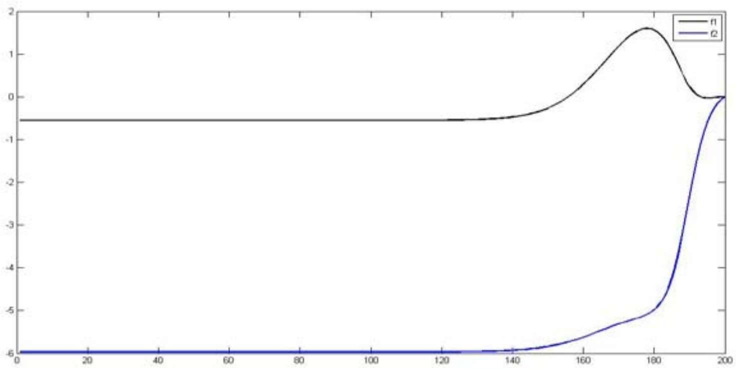
$$\text{Cost Function}: \quad J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[0.25x_1^2(k)+0.05x_2^2(k)+0.05u^2(k)]$$

$$\longrightarrow \qquad \mathbf{H}=0 \quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix}0.25 & 0\\ 0 & 0.05\end{bmatrix} \quad \mathbf{R}=0.05$$

۳-۱۰- نتایج تحلیلی-تنظیم کننده خطی (ادامه)

مثال (۱-۳.۱۰):

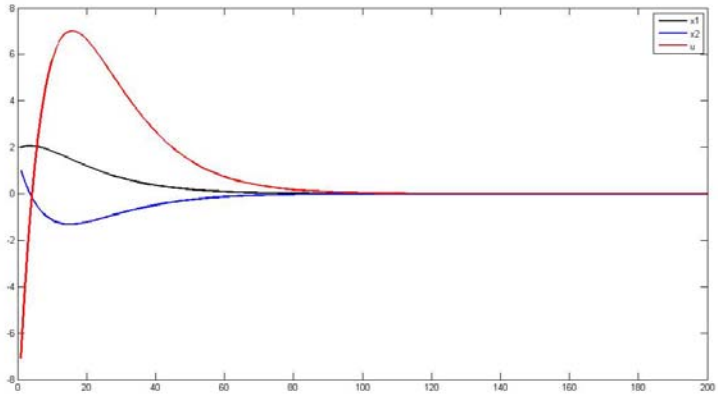
$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0.9974 & 0.0539\\ -0.1078 & 1.1591\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix}0.0013\\ 0.0539\end{bmatrix}\mathbf{u}(k)$$



۳-۱۰- نتایج تحلیلی-تنظیم کننده خطی (ادامه)

مثال (۱-۳.۱۰):

$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{bmatrix}0.9974 & 0.0539\\ -0.1078 & 1.1591\end{bmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{bmatrix}0.0013\\ 0.0539\end{bmatrix}\mathbf{u}(k)$$



۳-۱۱- معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن(H.J.B)

صورت مسئله قبل از گسسته سازی:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{a}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)$$

$$J=h(\mathbf{x}(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau),\tau)d\tau$$

بر اساس اصل شمول (**imbedding principle**):

$$J(x(t),t,\underset{t\le\tau\le t_f}{u(\tau)})=h(\mathbf{x}(t_f),t_f)+\int_{t}^{t_f} g(\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau),\tau)d\tau \quad \forall t\le t_f \qquad (3.11\text{-}3)$$

هدف همچنان یافتن قانون کنترلی است که تابع هزینه را می نیمم نماید:

$$J^*(x(t),t)=\min_{\substack{u(\tau)\\ t\le\tau\le t_f}}\left\{\int_{t}^{t_f} g(\mathbf{x}(\tau),\mathbf{u}(\tau),\tau)d\tau+h(\mathbf{x}(t_f),t_f)\right\} \quad \forall t\le t_f \qquad (3.11\text{-}4)$$

40

۳-۱۱- معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن(H.J.B)

با تقسیم محدوده زمانی به دو قسمت:

$$J^*(x(t),t)=\min_{\substack{u(\tau)\\ t\le\tau\le t_f}}\left\{\int_t^{t+\Delta t} g\,d\tau+\int_{t+\Delta t}^{t_f} g\,d\tau+h(\mathbf{x}(t_f),t_f)\right\}\quad \forall t\le t_f \qquad (3.11\text{-}5)$$

با استفاده از اصل بهینگی:

$$J^*(x(t),t)=\min_{\substack{u(\tau)\\ t\le\tau\le t_f}}\left\{\int_t^{t+\Delta t} g\,d\tau+\underbrace{\int_{t+\Delta t}^{t_f} g\,d\tau+h(\mathbf{x}(t_f),t_f)}_{J^*(x(t+\Delta t),t+\Delta t)}\right\}$$

$$J^*(x(t),t)=\min_{\substack{u(\tau)\\ t\le\tau\le t_f}}\left\{\int_t^{t+\Delta t} g\,d\tau+J^*(x(t+\Delta t),t+\Delta t)\right\} \qquad (3.11\text{-}6)$$

41

۳-۱۱- معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن(H.J.B)

با استفاده از تقریب بسط تیلور حول $(x(t),t)$:

$$J^*(x(t),t)=\min_{\substack{u(\tau)\\ t\le\tau\le t_f}}\{\int_t^{t+\Delta t} g\,d\tau+J^*(x(t),t)+\left[\frac{\partial J^*(x(t),t)}{\partial t}\right]\Delta t$$
$$+\left[\frac{\partial J^*(x(t),t)}{\partial x(t)}\right]^T\left[x(t+\Delta t)-x(t)\right]+\text{H.O.T}\}$$

در صورتی که Δt به اندازه کافی کوچک باشد:

$$J^*(x(t),t)=\min_{\substack{u(\tau)\\ t\le\tau\le t_f}}\{g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)\Delta t+J^*(\mathbf{x}(t),t)+J_t^*(\mathbf{x}(t),t)\Delta t$$
$$+J_{\mathbf{x}}^*(\mathbf{x}(t),t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)]\Delta t+O(\Delta t)\} \qquad (3.11\text{-}8)$$

42

۳-۱۱- معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن(H.J.B)

با خارج نمودن جملاتی که به $\mathbf{u}(t)$ وابسته نیستند :

$$J_t^*(\mathbf{x}(t),t)\Delta t + \min_{\substack{u(\tau)\\ t\le\tau\le t_f}}\{g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)\Delta t + J_{\mathbf{x}}^*(\mathbf{x}(t),t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)]\Delta t + O(\Delta t)\} = 0 \qquad (3.11\text{-}9)$$

با تقسیم بر Δt و میل دادن آن به سمت صفر:

$$J_t^*(\mathbf{x}(t),t) + \min_{u(\tau)}\{g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) + J_{\mathbf{x}}^*(\mathbf{x}(t),t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)]\} = 0 \qquad (3.11\text{-}10)$$

$$J^*(\mathbf{x}(t_f),t_f) = h(\mathbf{x}(t_f),t_f)$$

با تعریف هامیلتونین، $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),J_{\mathbf{x}}^*,t) \triangleq g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) + J_{\mathbf{x}}^*(\mathbf{x}(t),t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)] \qquad (3.11\text{-}12)$$

43

۳-۱۱- معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن(H.J.B)

$$\mathscr{H}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t),J_{\mathbf{x}}^*,t),J_{\mathbf{x}}^*,t\right) = \min_{\mathbf{u}(t)} \mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),J_{\mathbf{x}}^*,t)$$

در نتیجه معادله هامیلتون-ژاکوبی - بلمن (H.J.B):

$$\boxed{J_t^*(\mathbf{x}(t),t) + \mathscr{H}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t),J_{\mathbf{x}}^*,t),J_{\mathbf{x}}^*,t\right) = 0 \qquad (3.11\text{-}10a)}$$

مثال (۱-۳.۱۱)

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$

$$J = \frac{1}{2}x^2(T) + \int_0^T \frac{1}{4}u^2(t)dt$$

44

۳-۱۱- معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن(H.J.B)

مثال (۱-۳.۱۱):

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t)$$

$$J = \frac{1}{4}x^2(T) + \int_0^T \frac{1}{4}u^2(t)dt$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),J_{\mathbf{x}}^*,t) = \frac{1}{4}u^2(t) + J_{\mathbf{x}}^*(\mathbf{x}(t),t)[\mathbf{x}(t)+\mathbf{u}(t)] \qquad (3.11\text{-}16)$$

to solve the H.J.B equation:

$$\mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}^*(x(t),u(t),t),J_{\mathbf{x}}^*,t) = \min\{\mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),J_{\mathbf{x}}^*,t)\} = ?$$

$$\Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u} &= 0.5u(t) + J_x^* = 0 \\ \frac{\partial^2 \mathscr{H}}{\partial u^2} &= 0.5 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \; u^*(t) = -2J_x^*(x(t),t)$$

۳-۱۱- معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن(H.J.B)

H.J.B equation:

$$J_t^* + \frac{1}{4}[-2J_x^*]^2 + J_x^*[x(t) - 2J_x^*] = 0 \;\Rightarrow\; J_t^* - [J_x^*]^2 + J_x^*[x(t)] = 0$$

شرایط حدی برای حل معادله دیفرانسیل H.J.B فوق:

$$J^*(x(T),T) = \frac{1}{4}x^2(T)$$

راه حل مسئله می تواند حدس زدن پاسخ معادله باشد (ص ۱۱۲-۱۱۳).

۳-۱۲- تنظیم کننده خطی پیوسته

سیستمی با دینامیک خطی و تابع معیار مجذوری (**Quadratic**):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{H}\mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2}[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)]dt$$

$\mathbf{H},\mathbf{Q}$: Symmetric & P.S.D.

$\mathbf{R}$: Symmetric & P.D.

تشکیل هامیلتونین به منظور استفاده از معادله **H.J.B.**:

$$\mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),J_{\mathbf{x}}^*,t) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + J_{\mathbf{x}}^{*T}(\mathbf{x}(t),t)[\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)]$$

47

۳-۱۲- تنظیم کننده خطی پیوسته

با توجه به معادله **H.J.B.**:

$$\boxed{J_t^*(\mathbf{x}(t),t) + \mathscr{H}\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t),J_{\mathbf{x}}^*,t),J_{\mathbf{x}}^*,t\right) = 0 \qquad (3.11\text{-}10a)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{u}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}^T(t)J_x^*(\mathbf{x}(t),t) = 0 \\ &\frac{\partial^2\mathscr{H}}{\partial\mathbf{u}^2} = \mathbf{R}(t):\ \text{P.D.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)J_x^*(\mathbf{x}(t),t)$$

$$\longrightarrow \quad \mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}^*(t),J_{\mathbf{x}}^*,t) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \frac{1}{2}J_{\mathbf{x}}^{*T}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^TJ_{\mathbf{x}}^* + J_{\mathbf{x}}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{x} - J_{\mathbf{x}}^{*T}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^TJ_{\mathbf{x}}^*$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} - \frac{1}{2}J_{\mathbf{x}}^{*T}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^TJ_{\mathbf{x}}^* + J_{\mathbf{x}}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

48

۳-۱۲- تنظیم کننده خطی پیوسته

در نتیجه معادله H.J.B. برای تنظیم کننده خطی عبارت خواهد بود از:

$$J_t^* + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} - \frac{1}{2}J_{\mathbf{x}}^{*T}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T J_{\mathbf{x}}^* + J_{\mathbf{x}}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

$$\text{Marginal Condition}: \; J^*(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{H}\mathbf{x}(t_f)$$

شکل پاسخ :

$$\boxed{J^*(\mathbf{x}(t), t) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \qquad \mathbf{K}(t): \text{Symm.\&P.D.}}$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\dot{\mathbf{K}}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

۳-۱۲- تنظیم کننده خطی پیوسته

با توجه به اسکالر بودن عناصر معادله فوق می توان آن را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\dot{\mathbf{K}}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{K}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{x} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{Q}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{K}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{K}(t) = 0 \qquad (3.12\text{-}4)$$

$$\text{Marginal Condition}: \; \mathbf{K}(t_f) = \mathbf{H}$$

معادله ریکاتی
(Riccati)

۳-۱۳- جمع بندی معادله .H.J.B

- معادله .H.J.B یک شرط لازم و کافی برای تابع هزینه می نیمم است.
- در بیشتر مواقع لازم است از حل عددی برای حل معادله حاصل از .H.J.B استفاده نماییم.
- معادله .H.J.B پلی ما بین برنامه ریزی پویا و روشهای تغییراتی است.

51

باسمه تعالی

سیستم های کنترل بهینه

فصل چهارم:

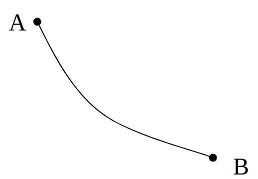
حساب تغییرات

1

فصل چهام: حساب تغییرات

مقدمه

- مسأله بهینه یابی (Dido و مسأله یافتن شکل هندسی با ماکزیمم مساحت و محیط یکسان و برابر)
- اوایل ۱۷۰۰ میلادی: نیوتن و مسأله تعیین شکل جسم متحرک با کمترین مقاومت در مقابل خود.
- مسأله بارچیستوچرون (Brachistochrone): روشهای پیشنهادی براداران برنولی (جان و جاکوب)، نیوتن و هوپیتال.

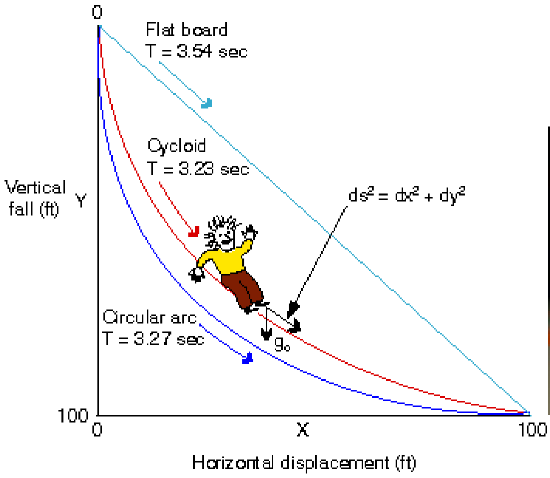


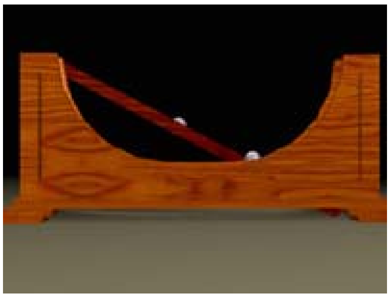
(شکل ۱-۴):

2

فصل چهام: حساب تغییرات

- شکل مساله بارچیستوچرون:





۴-۱- مفاهیم اولیه در حساب تغییرات:

- تعریف ۱-۴: قانونی که هر عضو دامنه،**q** ، را به یک نقطه منحصر به فرد برد (*Range*) نسبت می دهد.

مثال: (فاصله از مبدا **q**)

$$f(\mathbf{q}) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_n^2}$$

- تعریف ۲-۴: یک تابعی، J، قانونی است که به هر تابع، X ، یک عدد حقیقی نسبت می دهد.

مثال:

$$J(\mathrm{x}) = \int_{t_0}^{t_f} \mathrm{x}(t)dt$$

4

۴-۱- مفاهیم اولیه در حساب تغییرات(ادامه):

- تعریف ۴-۳: خطی بودن توابع

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha.\mathbf{q}) &= \alpha.f(\mathbf{q}) \\ f(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2) &= f(\mathbf{q}_1)+f(\mathbf{q}_2) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow f(\mathbf{q}_1+\alpha.\mathbf{q}_2) = f(\mathbf{q}_1)+\alpha.f(\mathbf{q}_2)$$

مثال (۴.۱-۳) ص ۱۳۸

- تعریف ۴-۴: شرط خطی بودن یک تابعی

$$\left.\begin{aligned} J(\alpha.\mathrm{x}) &= \alpha.J(\mathrm{x}) \\ J(\mathrm{x}^{(1)}+\mathrm{x}^{(2)}) &= J(\mathrm{x}^{(1)})+J(\mathrm{x}^{(2)}) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow J(\mathrm{x}^{(1)}+\alpha.\mathrm{x}^{(2)}) = J(\mathrm{x}^{(1)})+\alpha.J(\mathrm{x}^{(2)})$$

مثال (۴.۱-۴) ص ۱۳۹

5

۴-۱- مفاهیم اولیه در حساب تغییرات(ادامه):

- تعریف ۴-۵: تعریف نرم (norm)؛ قاعده ای که به هر نقطه یک عدد نسبت می دهد (معیاری از اندازه, توان و ....). نرم ها لازم است که در شرایط زیر صدق نمایند:

1. $\begin{cases} \|\mathbf{q}\| \geq 0 \\ \|\mathbf{q}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{q} = 0 \end{cases}$
2. $\|\alpha.\mathbf{q}\| = |\alpha|.\|\mathbf{q}\|$
3. $\|\mathbf{q}^{(1)}+\mathbf{q}^{(2)}\| \leq \|\mathbf{q}^{(1)}\|+\|\mathbf{q}^{(2)}\|$

مثال (۴.۱-۵) ص ۱۴۱

- $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$

$$\|\mathbf{q}\|_1 \triangleq |q_1|+|q_2| \qquad \|\mathbf{q}\|_2 \triangleq \sqrt{q_1^2+q_2^2}$$

6

۴-۱- مفاهیم اولیه در حساب تغییرات(ادامه):

- **تعریف ۶-۴: نرم تابع؛ قاعده ای که به هر تابع، x ، در فاصله زمانی $t_0 \le t \le t_f$ یک عدد حقیقی نسبت می دهد. نرم تابع نیز لازم است که در شرایط زیر صدق نمایند:**

$$1.\ \begin{cases} \|\mathrm{x}\| \ge 0 \\ \|\mathrm{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 0 \end{cases}$$

$$2.\ \|\alpha.\mathrm{x}\| = |\alpha|.\|\mathrm{x}\|$$

$$3.\ \|\mathrm{x}^{(1)} + \mathrm{x}^{(2)}\| \le \|\mathrm{x}^{(1)}\| + \|\mathrm{x}^{(2)}\|$$

مثال (۶-۴.۱) ص ۱۴۲

$$\|\mathrm{x}\| \triangleq \max_{t_0 \le t \le t_f} \{|\mathrm{x}(t)|\}$$

7

۴-۱- مفاهیم اولیه در حساب تغییرات(ادامه):

- **تعریف ۷-۴: نمو یک تابع؛ اگر $\mathbf{q}$ و $\mathbf{q}+\Delta\mathbf{q}$ عناصری باشند که برای آنها تابع مقدار داشته باشد، آنگاه نمو f که به صورت Δf نشان داده می شود عبارت است از:**

$$\Delta f \triangleq f(\mathbf{q}+\Delta\mathbf{q}) - f(\mathbf{q})$$

مثال (۷-۴.۱) ص ۱۴۳

- **تعریف ۸-۴: نمو یک تابعی؛ اگر x و $\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x}$ عناصری باشند که برای آنها تابع مقدار داشته باشد، آنگاه نمو J که به صورت ΔJ نشان داده می شود عبارت است از:**

$$\Delta J \triangleq J(\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x}) - J(\mathrm{x})$$

مثال (۸-۴.۱) ص ۱۴۴

8

۴-۱- مفاهیم اولیه در حساب تغییرات(ادامه):

- تعریف ۹-۴: مشتق یک تابع؛ اگر نمو یک تابع را بتوان به صورت زیر نوشت که در آن $df(\mathbf{q},\Delta\mathbf{q})$ یک تابع خطی از $\Delta\mathbf{q}$ است

$$\boxed{\Delta f(\mathbf{q},\Delta\mathbf{q}) = df(\mathbf{q},\Delta\mathbf{q}) + g(\mathbf{q},\Delta\mathbf{q}).\|\Delta\mathbf{q}\|}$$

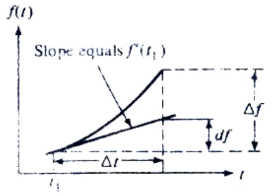
و $\boxed{\lim_{\|\Delta\mathbf{q}\|\to 0} g(\mathbf{q},\Delta\mathbf{q}) = 0}$ باشد، آنگاه f را برحسب $\mathbf{q}$ دیفرانسیل پذیر گویند.

df دیفرانسیل تابع

f' مشتق تابع

$$df(t,\Delta t) = f'(t).\Delta t$$

(شکل ۳-۴)



شکل ۳-۴ تعبیرهندسی Δf ، df و f'

۴-۱- مفاهیم اولیه در حساب تغییرات(ادامه):

- تعریف ۱۰-۴: اگر نمو یک تابعی را بتوان به صورت زیر نوشت که در آن δJ یک تابع خطی از $\delta \mathrm{x}$ است

$$\boxed{\Delta J(\mathrm{x},\delta\mathrm{x}) = \delta J(\mathrm{x},\delta\mathrm{x}) + g(\mathrm{x},\delta\mathrm{x}).\|\delta\mathrm{x}\|}$$

و $\boxed{\lim_{\|\delta\mathrm{x}\|\to 0} g(\mathrm{x},\Delta\mathrm{x}) = 0}$ باشد، آنگاه J را برحسب x دیفرانسیل پذیر گویند.

مثال (۹-۱.۴) ص ۱۴۷

- تعریف ۱۱-۴:حداقل و حداکثر نسبی

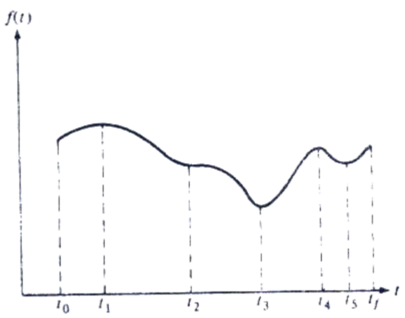
$$\boxed{\text{if } \exists\,\varepsilon > 0;\ \|\mathbf{q}\text{-}\mathbf{q}^*\| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \Delta f = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{q}^*) \geq 0 & \to f(\mathbf{q}^*): \text{Local Minimum} \\ \Delta f = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{q}^*) \leq 0 & \to f(\mathbf{q}^*): \text{Local Maximum} \end{cases}}$$

۴-۱- مفاهیم اولیه در حساب تغییرات(ادامه):

- **تعریف ۱۱-۴:حداقل و حداکثر نسبی (ادامه)**

شرط لازم برای وجود یک نقطه اکسترمم آن است که در این نقاط مشتق تابع صفر می شود.

مثال (۴.۱-۱۰) شکل (۴-۴)



شکل ۴-۴ تابعای با چندین نقطه نهایت

11

۴-۱- مفاهیم اولیه در حساب تغییرات(ادامه):

- **تعریف ۱۲-۴:حداقل و حداکثر نسبی یک تابعی**

$$\text{if } \exists \varepsilon > 0;\ \left\| \mathrm{x} - \mathrm{x}^* \right\| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \Delta J = J(\mathrm{x}) - J(\mathrm{x}^*) \geq 0 & \rightarrow J(\mathrm{x}^*): \text{Local Minimum} \\ \Delta J = J(\mathrm{x}) - J(\mathrm{x}^*) \leq 0 & \rightarrow J(\mathrm{x}^*): \text{Local Maximum} \end{cases}$$

- **قضیه اساسی حساب تغییرات**

اگر x^* یک منحنی نهایت (اکسترمم) باشد، تغییرات J روی x^* باید صفر شود، به عبارت دیگر: (اثبات در کتاب- با استفاده از برهان خلف)

$$\delta J(\mathrm{x}^*, \delta\,\mathrm{x}) = 0$$

12

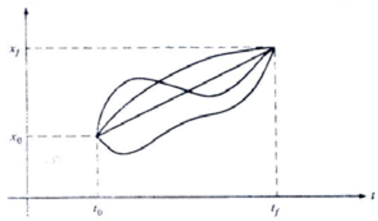
۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع:

- هدف: یافتن منحنی (یک تابع) که تابعی هایی معیار را که وابسته به یک تابع هستند را بهینه نماید.

- مسأله ۱ : حل مساله بهینه سازی تابعی J و یافتن x^* به صورتی که g دارای مشتقات مرتبه اول و دوم باشد، t_0 و t_f ثابت و $\mathrm{x}(t_0)$ و $\mathrm{x}(t_f)$ مشخص باشند(شکل ۶-۴).

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathrm{x}(t), \dot{\mathrm{x}}(t), t)dt$$

$$t_0, t_f, x(t_0), x(t_f) = cte \,\&\, defined$$



شکل ۶-۴ منحنی های قابل قبول برای مسئله ۱

13

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۱:

استفاده از نمو تابعی:

$$\Delta J(\mathrm{x}, \delta\,\mathrm{x}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathrm{x}(t) + \delta\,\mathrm{x}(t), \dot{\mathrm{x}}(t) + \delta\,\dot{\mathrm{x}}(t), t)dt$$

$$- \int_{t_0}^{t_f} g(\mathrm{x}(t), \dot{\mathrm{x}}(t), t)dt =$$

$$\Delta J(\mathrm{x}, \delta\,\mathrm{x}) = \int_{t_0}^{t_f} [g(\mathrm{x}(t) + \delta\,\mathrm{x}(t), \dot{\mathrm{x}}(t) + \delta\,\dot{\mathrm{x}}(t), t) - g(\mathrm{x}(t), \dot{\mathrm{x}}(t), t)]dt$$

14

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع - مسأله ۱:

با کمک جستن از بسط تیلور:

$$\Delta J(\mathrm{x},\delta \mathrm{x})=\int_{t_0}^{t_f}[\{g(\mathrm{x}(t),\dot{\mathrm{x}}(t),t)+\frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}\delta \mathrm{x}+\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\delta \dot{\mathrm{x}}$$

$$+\frac{\partial^2 g}{\partial \mathrm{x}^2}[\delta \mathrm{x}]^2+\frac{\partial^2 g}{\partial \dot{\mathrm{x}}^2}[\delta \dot{\mathrm{x}}]^2+\frac{\partial^2 g}{\partial \mathrm{x}\partial \dot{\mathrm{x}}}\delta \mathrm{x}\,\delta \dot{\mathrm{x}}+H.O.T\}-g(\mathrm{x}(t),\dot{\mathrm{x}}(t),t)]dt$$

با توجه به تعریف دیفرانسیل و دیفرانسیل پذیری:

$$\delta J(\mathrm{x},\delta \mathrm{x})=\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}\delta \mathrm{x}+\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\delta \dot{\mathrm{x}}]dt=\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\delta \mathrm{x}\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}\delta \mathrm{x}]dt-\int_{t_0}^{t_f}(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\right]\delta \mathrm{x})dt$$

$$=\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\delta \mathrm{x}\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\right]]\delta \mathrm{x}\,dt$$

15

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع - مسأله ۱:

با توجه به مشخص بودن نقاط ابتدایی و انتهایی (عبور کلیه منحنی ها از نقاط مشخص شده):

$$\begin{cases}\delta \mathrm{x}(t_0)=0\\ \delta \mathrm{x}(t_f)=0\end{cases}\quad\longrightarrow\quad \delta J(\mathrm{x},\delta \mathrm{x})=\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\right]]\delta \mathrm{x}\,dt$$

با توجه به قضیه اساسی بهینه سازی لازم است:

$$\delta J(\mathrm{x},\delta \mathrm{x})=\int_{t_0}^{t_f}\underbrace{[\frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\right]]}_{Cont.}\underbrace{\delta \mathrm{x}}_{Cont.}dt=0\quad\longrightarrow\quad \boxed{\text{Euler Eq.:}\quad \frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\right]=0}$$

(معادله اولر شرط لازم برای یافتن تابع x است.)

16

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع - مسأله ۱:

مثال ۱-۴.۲.۲: نهایت تابعی؟

$$\left.\begin{array}{l} J(x)=\int_0^{\Pi/2}[\dot{x}^2(t)-x^2(t)]dt \\ x(0)=0 \\ x(\frac{\Pi}{2})=1 \end{array}\right\} \rightarrow x^*=?$$

معادله اولر متناظر:

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right]=0 \Rightarrow -2x(t)-\frac{d}{dt}[2\dot{x}(t)]=0 \longrightarrow \ddot{x}(t)+x(t)=0$$

$$\longrightarrow \text{Char. Polynomial}:\ s^2+1=0$$

$$\longrightarrow x(t)=c_1\sin t+c_2\cos t \xrightarrow{\text{marginal Conditions}} x^*(t)=\sin t$$

17

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع - مسأله ۱:

ادامه مثال ۱-۴.۲.۲: بررسی ماکزیمم و/یا می نیمم بودن x^*

$$x(t)=\sin t+\alpha\sin(2t)=x^*+\delta x \leftrightarrow \begin{cases} x(0)=0 \\ x(\frac{\Pi}{2})=1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow J(x^*+\delta x)=\frac{3\Pi}{4}\alpha^2>0 \Rightarrow J(x^*+\delta x)>J(x^*)=0$$

نتیجه قطعی: x^* یک ماکزیمم نیست.

سوال: آیا x^* یک مینیمم است؟

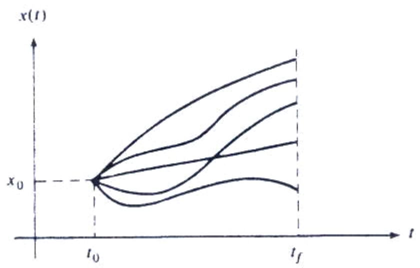
18

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع:

- مسأله ۲: حل مساله بهینه سازی تابعی J و یافتن x^* به صورتی که g دارای مشتقات مرتبه اول و دوم باشد (شکل ۹-۴).

$$t_0, t_f, x(t_0) = cte \;\&\; defined$$
$$x(t_f): free$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathrm{x}(t), \dot{\mathrm{x}}(t), t)dt$$



شکل ۹-۴ چندین منحنی قابل قبول برای مسئله ۲

19

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۲:

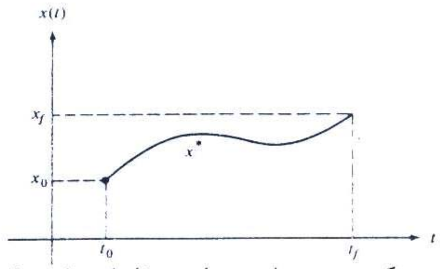
مشابه حل مسأله ۱، از نمو تابعی استفاده می شود و دیفرانسیل تابعی محاسبه می گردد. مجددا با استفاده از انتگرال جزء به جزء داریم:

$$\delta J(\mathrm{x}, \delta\,\mathrm{x}) = \frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\delta\,\mathrm{x}\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial g}{\partial\,\mathrm{x}} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial\,\dot{\mathrm{x}}}\right]]\delta\,\mathrm{x}\,dt$$

$$\begin{cases} \delta\,\mathrm{x}(t_0) = 0 \\ \delta\,\mathrm{x}(t_f) = \text{Arbitrary} \end{cases}$$

برای حل مسأله (شکل ۱۰-۴) راه گشاست.

(شکل ۱۰-۴) نشان می دهد که اگر نقطه انتهایی مساله ۲ باشد، آنگاه پاسخ یک مساله ۱ نیز است. لذا لازم است در معادله اولر صدق نماید.



شکل ۱۰-۴ یک منحنی نهایت برای مسئله‌ای با نقطه انتهائی غیر معین

20

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۲:

با توجه به آنچه گفته شد:

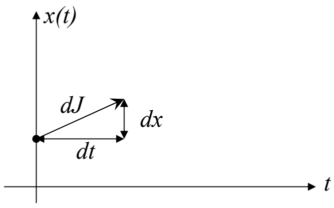
$$\delta J(\mathrm{x},\delta \mathrm{x})=\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\delta \mathrm{x}\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\right]]\delta \mathrm{x}\,dt=0 \;\longrightarrow\; \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\delta \mathrm{x}\Big|_{t_0}^{t_f}=\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\Big|_{t_f}.\delta \mathrm{x}(t_f)=0 \\ \int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\right]]\delta \mathrm{x}\,dt=0 \end{array}$$

شرط حدی طبیعی:

$$\longrightarrow \boxed{\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)=0 \\ \frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\right]=0 \end{cases}}$$

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۲:

مثال ۲-۲.۴: منحنی همواری که نقطه $x(0)=1$ را به خط $t=5$ با کمترین طول متصل می نماید بیابید.



$$\longrightarrow dJ=\sqrt{(dx)^2+(dt)^2}\Rightarrow \frac{dJ}{dt}=\sqrt{1+\dot{x}^2}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{J=\int_0^5\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt=\int_0^5\underbrace{[1+\dot{x}^2]^{1/2}}_{g}dt}$$

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۲:

مثال ۲-۴.۲: (ادامه)

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right]=0 \Rightarrow 0-\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}\right]=0 \rightarrow \ddot{x}(t)=0$$

$$\rightarrow x(t)=c_1 t+c_2 \rightarrow x(0)=c_1\times 0+c_2=1 \Rightarrow c_2=1$$

$$\rightarrow x(t)=c_1 t+1$$

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}=0 \rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}=0 \rightarrow c_1=0 \rightarrow \boxed{x^*(t)=1}$$

23

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۲:

مثال ۳-۴.۲:

$$J(x)=\int_0^2 [\dot{x}^2(t)+2x(t)\dot{x}(t)+4x^2(t)]$$

$x(0)=1$

$x(2):$ free

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right]=0 \Rightarrow -\ddot{x}(t)+4x(t)=0 \rightarrow x^*(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^{2t}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}=0 \Rightarrow 2\dot{x}(t)+2x(t)=0 \rightarrow -2c_1e^{-2t}+2c_2e^{2t}+c_1e^{-2t}+c_2e^{2t}=0$$

$$\rightarrow \boxed{-c_1e^{-4}+3c_2e^4=0} \qquad \boxed{x^*(0)=c_1+c_2=1}$$

$$\boxed{c_1=\frac{3e^4}{e^{-4}+3e^4}=0.9999 \qquad c_2=\frac{e^{-4}}{e^{-4}+3e^4}=1.11\times 10^{-4}}$$

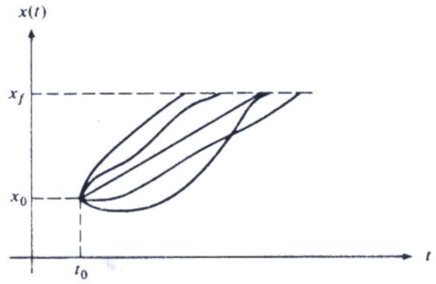
24

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع:

- مسأله ۳: حل مساله بهینه سازی تابعی J و یافتن x^* به صورتی که g دارای مشتقات مرتبه اول و دوم باشد (شکل ۱۱-۴).

$$t_0, x(t_0), x(t_f) = cte \;\&\; defined$$
$$t_f : free$$

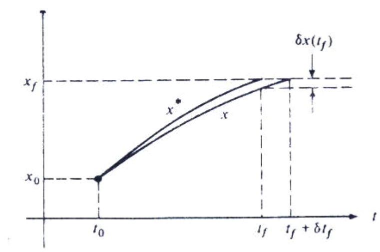
$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$



شکل ۱۱-۴ چندین منحنی قابل قبول برای مسئله ۳

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع - مسأله ۳:

به منظور حل مسأله ۳، با توجه به اینکه زمان نهایی مشخص نگشته است، لذا متد و روش حل متفاوت خواهد بود. به صورتیکه اگر x^* به (t_f, x_f) ختم گردد مطابق شکل زیر منحنی را به ازای تغییرات زمان نهایی $(t_f + \delta t_f, x_f)$ در نظر می گیریم. در این حالت نمو را به صورت زیر تشکیل می دهیم (شکل ۱۲-۴).



شکل ۱۲-۴ یک منحنی نهایت ، x^* ، ویک منحنی مقایسه‌ای، x ، مجاور آن

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع - مسأله ۳:

در این حالت نمو را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$\Delta J(\mathrm{x},\delta \mathrm{x}) = \int_{t_0}^{t_f+\delta t_f} g(\mathrm{x}(t),\dot{\mathrm{x}}(t),t)dt - \int_{t_0}^{t_f} g(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f}\left[g(\mathrm{x}(t),\dot{\mathrm{x}}(t),t) - g(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)\right]dt + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} g(\mathrm{x}(t),\dot{\mathrm{x}}(t),t)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f}\left[g(\mathrm{x}^*(t)+\delta \mathrm{x}(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t)+\delta \dot{\mathrm{x}}(t),t) - g(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)\right]dt + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} g(\mathrm{x}(t),\dot{\mathrm{x}}(t),t)dt$$

تذکر: مقدار $\delta x(t) = [x(t) - x^*(t)]$ در فاصله $t_0 \le t \le t_f$ فقط قابل تعریف است
زیرا $x^*(t)$ برای $t_f \le t \le t_f + \delta t_f$ قابل تعریف نیست.

27

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع - مسأله ۳:

با استفاده از بسط تیلور حول $x^*(t)$ و $\dot{x}^*(t)$ داریم:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f}\{g(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t) + \frac{\partial g}{\partial x}\delta x + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} - g(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)\}dt + o(\delta x,\delta\dot{x})$$

$$+ \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} g(\mathrm{x}(t),\dot{\mathrm{x}}(t),t)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f}\{\frac{\partial g}{\partial x}\delta x + \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}\}dt + o(\delta x,\delta\dot{x}) + [g(\mathrm{x}(t_f),\dot{\mathrm{x}}(t_f),t_f)]\delta t_f + o(\delta t_f)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f).\delta x(t_f) + [g(\mathrm{x}(t_f),\dot{\mathrm{x}}(t_f),t_f)]\delta t_f +$$

$$\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)]\right\}.\delta x(t)dt + o(.)$$

28

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع - مسأله ۳:

حال با بسط تیلور $g(\mathrm{x}(t_f),\dot{\mathrm{x}}(t_f),t_f)$ حول $g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t\,)$ داریم:

$$g(\mathrm{x}(t_f),\dot{\mathrm{x}}(t_f),t_f)] = g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f) +$$
$$[\frac{\partial g}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)]\delta\,\mathrm{x}(t_f)$$
$$[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathrm{x}}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)]\delta\,\dot{\mathrm{x}}(t_f) + o(.)$$

با جایگزاری از بالا در رابطه نمو تابعی داریم:

$$\Delta J = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f).\delta x(t_f) + [g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)]\delta t_f +$$
$$\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)]\right\}.\delta x(t)dt + o(.)$$

29

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع - مسأله ۳:

حال با بسط تیلور $g(\mathrm{x}(t_f),\dot{\mathrm{x}}(t_f),t_f)$ حول $g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t\,)$ داریم:

$$\delta\,\mathrm{x}(t_f):\begin{cases}\neq 0\\ \neq \text{uncertain}\end{cases} \quad \rightarrow \quad \delta\,\mathrm{x}(t_f) = f(\delta t_f): \quad \text{as a function of } \delta t_f$$

با توجه به شکل ۱۲-۴، تقریب خطی استفاده می شود:

$$\delta x(t_f) + \dot{x}^*(t_f)\delta t_f = 0 \quad \rightarrow \quad \delta x(t_f) = -\dot{x}^*(t_f)\delta t_f)$$

$$\Delta J = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f).\underline{(-\dot{x}^*(t_f)\delta t_f)} + [g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)]\delta t_f +$$
$$\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)]\right\}.\delta x(t)dt + o(.)$$

30

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۳:

$$\delta J(x^*,\delta x)=\left\{-\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)\dot{x}^*(t_f)+g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)\right\}\delta t_f+$$

$$\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)\right]\right\}\delta x(t)dt$$

با توجه به مسائل قبلی:

شرایط حدی لازم:

$$g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)-\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)\dot{x}^*(t_f)=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0$$

31

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۳:

مثال ۴-۲.۴: منحنی نهایت یا اکسترممی که تابعی زیر را می نیمم نماید.

$$\begin{cases} x(1)=4 \\ x(t_f)=4, \\ t_f>1 \end{cases}\qquad J=\int_1^{t_f}[2x(t)+0.5\dot{x}^2(t)]dt$$

$$1)\quad \frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0\longrightarrow\quad \ddot{x}(t)=2\quad\longrightarrow\quad \boxed{x(t)=t^2+c_1t+c_2}$$

$$2)\quad g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)-\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)\dot{x}^*(t_f)=0\longrightarrow\quad 2x(t_f)+0.5\dot{x}^2(t_f)-\dot{x}^2(t_f)=0$$

$$\longrightarrow\boxed{2x(t_f)-0.5\dot{x}^2(t_f)=0}$$

32

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۳:

ادامه مثال ۴-۴.۲:

$x(1)=4 \longrightarrow x(1)=1+c_1+c_2=4$

$x(t_f)=4 \longrightarrow x(t_f)=t_f^{\,2}+c_1t_f+c_2=4$

$2x(t_f)-0.5\dot{x}^2(t_f)=0 \longrightarrow 2c_2-0.5c_1^2=0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1=-6 \\ c_2=9 \\ t_f=5 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t)=t^2-6t+9 \\ t_f=5 \end{cases}$$

33

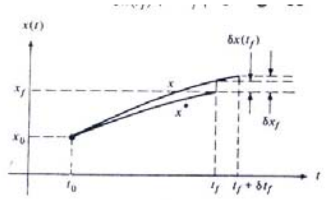
۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع:

- **مسأله ۴:** حل مساله بهینه سازی تابعی J و یافتن x^* به صورتی که g دارای مشتقات مرتبه اول و دوم باشد.

$$J=\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),\dot{x}(t),t)dt$$

$t_0, x(t_0)=cte \;\&\; defined$
$t_f, x(t_f): free$

به منظور حل مسأله۴،شکل ۱۳-۴ قابل توجه خواهد بود(تفاوت تعریف $\delta x(t_f)$ و δx_f . (شکل ۱۳-۴).



شکل ۱۳-۴: یک منحنی نهایت و یک منحنی مقایسه‌ای مجاور آن برای مسئله ۴

34

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۴:

شروع حل این مسأله مشابه مسأله قبل است تا رسیدن به این معادله:

$$\Delta J = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f).\delta x(t_f) + [g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)]\delta t_f +$$

$$\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)]\right\}.\delta x(t)dt + o(.)$$

$$\delta\,\mathrm{x}(t_f):\begin{cases}\neq 0\\ \neq \text{uncertain}\end{cases} \quad \rightarrow \quad \delta\,\mathrm{x}(t_f) = f(\delta t_f): \quad \text{as a function of } \delta t_f$$

با توجه به شکل ۱۳-۴، تقریب خطی استفاده می شود:

$$\delta x_f = \delta x(t_f) + \dot{x}^*(t_f)\delta t_f \;\rightarrow\; \delta x(t_f) = \delta x_f - \dot{x}^*(t_f)\delta t_f$$

35

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۴:

در نتیجه:

$$\Delta J = \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)\right].\delta x_f +$$

$$+\left[g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f) - [\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)]\dot{x}^*(t_f)\right]\delta t_f +$$

$$\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)]\right\}.\delta x(t)dt + o(.)$$

لذا (معادله کلی):

$$\boxed{\begin{aligned}&\delta J(x^*,\delta x) = \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)\right].\delta x_f +\\ &+\left[g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f) - [\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)]\dot{x}^*(t_f)\right]\delta t_f +\\ &\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t),\dot{\mathrm{x}}^*(t),t)]\right\}.\delta x(t)dt\end{aligned}}$$

36

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۴:

در دوحالت حل مساله بررسی می شود:

حالت اول(t_f و $x(t_f)$ مستقل و مرتبط نیستند):

$$\delta J(x^*,\delta x)=\left[\frac{\partial g}{\partial \dot x}(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)\right].\delta x_f+$$
$$+\left[g(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)-[\frac{\partial g}{\partial \dot x}(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)]\dot x^*(t_f)\right]\delta t_f+$$
$$\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t),\dot x^*(t),t)-\frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot x}(x^*(t),\dot x^*(t),t)]\right\}.\delta x(t)dt$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\frac{\partial g}{\partial \dot x}(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)=0\\ g(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)-[\frac{\partial g}{\partial \dot x}(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)]\dot x^*(t_f)=0\end{array}\right\}\Rightarrow g(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)=0\\ \frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial g}{\partial \dot x})=0\end{array}}$$

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۴:

حالت دوم(t_f و $x(t_f)$ مرتبط هستند):

$$x(t_f)=\theta(t_f)\ \longrightarrow\ \delta x_f=\frac{\partial\theta}{\partial t}(t_f)\delta t_f$$

$$\delta J(x^*,\delta x)=\left[\frac{\partial g}{\partial \dot x}(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)\right].\underline{\frac{\partial\theta}{\partial t}(t_f)\delta t_f}+\left[g(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)-[\frac{\partial g}{\partial \dot x}(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)]\dot x^*(t_f)\right]\delta t_f$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t),\dot x^*(t),t)-\frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot x}(x^*(t),\dot x^*(t),t)]\right\}.\delta x(t)dt$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l}g(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)+[\frac{\partial g}{\partial \dot x}(x^*(t_f),\dot x^*(t_f),t_f)]\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}(t_f)-\dot x^*(t_f)\right)=0\\ \frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial g}{\partial \dot x})=0\end{array}}$$

(شرط تقاطع)

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۴:

مثال ۵-۲.۴: منحنی نهایت یا اکسترممی که تابعی زیر را می نیمم نماید.

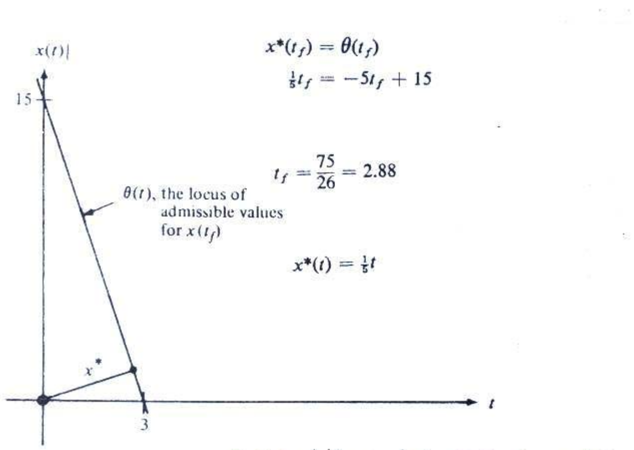
$$J=\int_{t_0}^{t_f}[1+\dot{x}^2(t)]^{0.5}\,dt \qquad \begin{cases} t_0=0 \\ x(t_0)=0 \\ \theta(t)=-5t+15 \end{cases}$$

1) $$\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)=0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}\right)=0 \rightarrow \ddot{x}(t)=0 \rightarrow \boxed{x(t)=c_1t+c_2}$$

$$\rightarrow x(t_0=0)=0 \rightarrow c_2=0 \rightarrow \boxed{x(t)=c_1t}$$

2) $$g(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f)+\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f)\right]\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}(t_f)-\dot{x}^*(t_f)\right)=0$$

39



شکل ۱۵-۴ منحنی نهایت مثال ۵-۲-۴

40

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۴:

ادامه مثال ۴.۲-۵ (شکل ۱۵-۴):

$$2)\quad g(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f)+[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f)]\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}(t_f)-\dot{x}^*(t_f)\right)=0$$

$$\rightarrow\quad \sqrt{1+\dot{x}^2(t_f)}+\frac{\dot{x}(t_f)}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t_f)}}\left(-5-\dot{x}(t_f)\right)=0$$

$$\rightarrow\quad 1+\dot{x}^2(t_f)+\dot{x}(t_f)\left(-5-\dot{x}(t_f)\right)=0 \rightarrow \quad -5\dot{x}(t_f)+1=0$$

$$\rightarrow\quad -5c_1+1=0 \quad\rightarrow\quad c_1=0.2 \quad\rightarrow\quad \boxed{x(t)=0.2t}$$

$$\rightarrow\quad x^*(t_f)=\theta(t_f)=-5t_f+15=0.2t_f \quad\rightarrow\quad \boxed{t_f=2.88}$$

41

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۴:

مثال ۴.۲-۶: منحنی نهایت یا اکسترممی که تابعی زیر را می نیمم نماید.

$$J=\int_{t_0}^{t_f}[1+\dot{x}^2(t)]^{0.5}\,dt \qquad \begin{cases} t_0=0 \\ x(t_0)=0 \\ \theta(t)=0.5[t-5]^2-0.5 \end{cases}$$

$$1)\quad \frac{\partial g}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}})=0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}\right)=0 \rightarrow \ddot{x}(t)=0 \rightarrow \boxed{x(t)=c_1t+c_2}$$

$$\rightarrow x(t_0=0)=0 \quad\rightarrow\quad c_2=0 \quad\rightarrow\quad \boxed{x(t)=c_1t}$$

42

۴-۲- تابعی های وابسته به یک تابع- مسأله ۴:

ادامه مثال ۶-۴.۲:

$$2)\quad g(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)+[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathrm{x}^*(t_f),\dot{\mathrm{x}}^*(t_f),t_f)]\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}(t_f)-\dot{x}^*(t_f)\right)=0$$

$$\rightarrow\ \sqrt{1+\dot{x}^2(t_f)}+\frac{\dot{x}(t_f)}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t_f)}}\left(t_f-5-\dot{x}(t_f)\right)=0$$

$$\rightarrow\ 1+\dot{x}^2(t_f)+\dot{x}(t_f)\left(t_f-5-\dot{x}(t_f)\right)=0\ \rightarrow\ (t_f-5)\dot{x}(t_f)+1=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\rightarrow\ c_1(t_f-5)+1=0\\ \rightarrow\ x^*(t_f)=\theta(t_f)=c_1t_f=0.5(t_f-5)^2-0.5\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}c_1=0.5\\ t_f=3\end{array}}\rightarrow \boxed{x^*(t)=0.5t}$$

43

۴-۳- تابعی هایی که شامل چندین تابع مستقل باشند:

در بخش ۴-۲ با بهینه سازی توابعی که فقط شامل یک تابع هستند آشنا گردیدیم. در این بخش تابعی ها به چندین تابع مستقل و مشتقات مرتبه اول آنها پیوسته هستند(به عبارت دیگر در این فصل فرم ماتریسی مباحث مطرح شده در بخش ۴-۲ مورد بررسی قرار خواهد گرفت).

44

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع- مسأله ۱ الف:

مساله ۱ الف – نقطه انتهایی ثابت:

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{t_0}^{t_f} g(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, t)dt$$

Where :

x_i = independent functions

$\dot{x}_i$ = continuous

$\exists \ \frac{\partial g}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i}, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial \dot{x}_i^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$: Continuous & Known

and :

$x_i(t_0) = x_{i0}, \ x_i(t_f) = x_{if}$

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع- مسأله ۱ الف:

مساله ۱ الف – نقطه انتهایی ثابت:

هدف یافتن $x_i^*(t)$ که تابعی J را می نیمم نماید.

استفاده از قضیه اساسی و نمو تابع:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \{g(x_1 + \delta x_1, \dots, x_n + \delta x_n, \dot{x}_1 + \delta \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n + \delta \dot{x}_n, t)$$

$$- g(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t)\}dt$$

با استفاده از بسط تیلور:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t)\delta x_i \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i}(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t)\delta \dot{x}_i \}dt + H.O.T. \right\} dt$$

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع- مسأله ۱ الف:

با توجه به اینکه δJ فقط به جملات خطی وابسته است و استفاده از انتگرال جزء به جزء:

$$\delta J = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i}(x_1,\dots,x_n,\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n,t)\delta x_i\right]\Bigg|_{t_0}^{t_f}$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n,\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n,t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i}(x_1,\dots,x_n,\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n,t)\right]\right)\delta x_i\right\}dt$$

با توجه به اینکه:

$\delta x_i(t_0)=0,\ \ \delta x_i(t_f)=0 \longrightarrow$ جملات خارج انتگرال صفر است.

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع- مسأله ۱ الف:

در نتیجه:

$$\delta J = 0 = \int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n,\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n,t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i}(x_1,\dots,x_n,\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n,t)\right]\right\}\delta x_i dt$$

با توجه به اینکه لازم است برای هر زمان معادله فوق برقرار باشد، لذا:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_2^*,\dot{x}_1^*,\dots,\dot{x}_n^*,t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_i}(x_1^*,\dots,x_2^*,\dot{x}_1^*,\dots,\dot{x}_n^*,)\right]=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),t)\right]=0}$$

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع- مسأله ۱ الف:

مثال ۴.۳-۱: هدف یافتن معادله اولر برای تابعی زیر:

$$J=\int_{t_0}^{t_f}[x_1^2(t)x_2(t)+t^2\dot{x}_1^2(t)-\dot{x}_2^2(t)\dot{x}_1(t)]dt$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),t)\right]=0$$

$$\rightarrow\quad \begin{bmatrix}2x_1^*(t)x_2^*(t)\\ x_1^{*2}(t)\end{bmatrix}-\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}2t^2\dot{x}_1^*(t)-\dot{x}_2^{*2}(t)\\ -2\dot{x}_2^*(t)\dot{x}_1^*(t)\end{bmatrix}=0$$

$$\rightarrow\quad \begin{cases}2x_1^*(t)x_2^*(t)-4t\dot{x}_1^*(t)-2t^2\ddot{x}_1^*(t)+2\ddot{x}_2^*(t)\dot{x}_2^*(t)=0\\ x_1^{*2}(t)+2\ddot{x}_2^*(t)\dot{x}_1^*(t)+2\dot{x}_2^*(t)\ddot{x}_1^*(t)=0\end{cases}$$

49

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع- مسأله ۱ الف:

مثال ۴.۳-۲: مطلوبست محاسبه منحنی اکسترمم برای:

$$J=\int_0^{\pi/4}[x_1^2(t)+4x_2^2(t)+\dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t)]dt\qquad \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{x}(\tfrac{\pi}{4})=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),t)\right]=0$$

$$\rightarrow\quad \begin{bmatrix}2x_1^*(t)\\ 8x_2^*(t)\end{bmatrix}-\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot{x}_2^*(t)\\ \dot{x}_1^*(t)\end{bmatrix}=0$$

$$\rightarrow\quad \begin{cases}2x_1^*(t)-\ddot{x}_2^*(t)=0\\ 8x_2^*(t)-\ddot{x}_1^*(t)=0\end{cases}\rightarrow\quad \begin{cases}x_1^*(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}+c_3\cos 2t+c_4\sin 2t\\ x_2^*(t)=\frac{1}{2}c_1e^{2t}+\frac{1}{2}c_2e^{-2t}-\frac{1}{2}c_3\cos 2t-\frac{1}{2}c_4\sin 2t\end{cases}$$

50

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع- مسأله ۴ الف:

مساله ۴-الف – نقطه انتهایی آزاد و غیرمعین:

$$J(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)dt$$

با شرایطی مشابه ۴-الف و مشابه مساله ۴:

$$\delta J(\mathbf{x}^*, \delta\mathbf{x}) = 0 = \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right]^T \delta\mathbf{x}_f$$
$$+\left[g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_f)\right]\delta t_f$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right]\right\}^T \delta\mathbf{x}(t)dt$$

51

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع- مسأله ۴ الف:

مساله ۴-الف – نقطه انتهایی آزاد و غیرمعین:

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right] = 0 \qquad (4.3\text{-}17)}$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right]^T \delta\mathbf{x}_f$$
$$+\left[g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_f)\right]\delta t_f = 0 \quad (4.3\text{-}18)$$

52

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع - جمع بندی

جدول ۱-۴ (ص ۱۸۸):

Problem description	Substitution	Boundary conditions	Remarks
1. $\mathbf{x}(t_f)$, t_f both specified (*Problem 1*)	$\delta\mathbf{x}_f = \delta\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}$ $\delta t_f = 0$	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x}^*(t_f) = \mathbf{x}_f$	$2n$ equations to determine $2n$ constants of integration
2. $\mathbf{x}(t_f)$ free; t_f specified (*Problem 2*)	$\delta\mathbf{x}_f = \delta\mathbf{x}(t_f)$ $\delta t_f = 0$	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) = \mathbf{0}$	$2n$ equations to determine $2n$ constants of integration
3. t_f free; $\mathbf{x}(t_f)$ specified (*Problem 3*)	$\delta\mathbf{x}_f = \mathbf{0}$	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x}^*(t_f) = \mathbf{x}_f$ $g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_f) = 0$	$(2n + 1)$ equations to determine $2n$ constants of integration and t_f
4. t_f, $\mathbf{x}(t_f)$ free and independent (*Problem 4*)	—	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) = \mathbf{0}$ $g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) = 0$	$(2n + 1)$ equations to determine $2n$ constants of integration and t_f
5. t_f, $\mathbf{x}(t_f)$ free but related by $\mathbf{x}(t_f) = \boldsymbol{\theta}(t_f)$ (*Problem 4*)	$\delta\mathbf{x}_f = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}(t_f)\,\delta t_f$†	$\mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{x}^*(t_f) = \boldsymbol{\theta}(t_f)$ $g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) + \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right]^T \left[\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}(t_f) - \dot{\mathbf{x}}^*(t_f)\right] = 0$†	$(2n + 1)$ equations to determine $2n$ constants of integration and t_f

† $\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$ نمایانگـــــر بردار $n \times 1$ ستونی $\left[\frac{d\theta_1}{dt}\ \frac{d\theta_2}{dt}\ \cdots\ \frac{d\theta_n}{dt}\right]^T$ میباشد.

جدول ۱-۴ تعیین روابط شرایط حـــدی

53

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع (چند مثال):

مثال ۳-۴.۳.۳: مطلوبست محاسبه منحنی اکسترمم برای:

$$J = \int_0^{\Pi/4} [x_1^2(t) + \dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) + \dot{x}_2^2(t)]dt \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}(\tfrac{\Pi}{4}) = \begin{bmatrix} 2 \\ free \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)\right] = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x_1^*(t) - \ddot{x}_2^*(t) = 0 \\ -2\ddot{x}_2^*(t) - \ddot{x}_1^*(t) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \ddot{x}_1^*(t) + 4x_1^*(t) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1^*(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \\ x_2^*(t) = -\frac{c_1}{2}\cos 2t - \frac{c_2}{2}\sin 2t + c_3 t + c_4 \end{cases}$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}_2}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right]^T \delta x_{2f} = 0 \rightarrow \dot{x}_1^*(\tfrac{\Pi}{4}) + 2\dot{x}_2^*(\tfrac{\Pi}{4}) = 2c_3 = 0$$

54

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع (چند مثال):

مثال ۳-۴.۳(ادامه):

$$\begin{cases} x_1^*(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t \\ x_2^*(t) = -\frac{c_1}{2}\cos 2t - \frac{c_2}{2}\sin 2t + c_3 t + c_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = c_1 = 1 \\ x_1(\frac{\Pi}{4}) = c_2 = 2 \\ x_2(0) = -\dfrac{c_1}{2} + c_4 = -0.5 + c_4 = 1.5 \Rightarrow c_4 = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1^*(t) = \cos 2t + 2\sin 2t \\ x_2^*(t) = -\frac{1}{2}\cos 2t - \sin 2t + 2 \end{cases}$$

55

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع (چند مثال):

مثال ۴-۴.۳: مطلوبست محاسبه منحنی اکسترمم برای:

$$J = \int_0^{\Pi/4} [x_1^3(t) + x_1^2(t) + 2\dot{x}_1(t)\dot{x}_2(t) + x_1(t)x_2^2(t)]dt$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}(t_f) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)\right] = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x_1^{*2}(t) + 2x_1^*(t) + x_2^{*2}(t) - 2\ddot{x}_2^*(t) = 0 \\ 2x_1^*(t)x_2^*(t) - 2\ddot{x}_1^*(t) = 0 \end{cases}$$

$$g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)\right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_f) = 0$$

56

$$\rightarrow x_1^{*3}(t) + x_1^{*2}(t) - 2\dot{x}_1^*(t)\dot{x}_2^*(t) + x_1^*(t_f)x_2^{*2}(t_f) = 0$$

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع(چند مثال):

مثال ۵-۴.۳: مطلوبست محاسبه منحنی اکسترمم برای:

$$J=\int_0^{t_f}[t\dot{x}(t)+\dot{x}^2(t)]dt$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t)-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t),t)\right]=0 \rightarrow 1+2\ddot{x}(t)=0$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{x}^*(t)=-\tfrac{1}{4}t^2+c_1t+c_2$$

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع(چند مثال):

مثال ۵-۴.۳ (ادامه):

$$J=\int_0^{t_f}[t\dot{x}(t)+\dot{x}^2(t)]dt$$

$$\leftrightarrow \quad x^*(t)=-\tfrac{1}{4}t^2+c_1t+c_2$$

حالت الف:

$$\boxed{\begin{array}{l} x(0)=1 \\ t_f=1 \\ x(1)=2.75 \end{array}} \rightarrow \begin{cases} x^*(0)=c_2=1 \\ x^*(1)=-0.25+c_1+1=2.75 \Rightarrow c_1=2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x^*(t)=-\tfrac{1}{4}t^2+2t+1}$$

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع(چند مثال):

مثال ۵-۴.۳ (ادامه):

$$J=\int_0^{t_f}[t\dot{x}(t)+\dot{x}^2(t)]dt \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{x}^*(t)=-\tfrac{1}{4}t^2+c_1t+c_2$$

حالت ب:

$x(0)=1 \rightarrow x^*(0)=c_2=1$

$t_f=2$

$x(2)=free \rightarrow \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f)=0 \rightarrow t_f+2\dot{x}(t_f)=0$

$\rightarrow t_f-0.5t_f^2+c_1=2-2+c_1=0 \rightarrow c_1=0$

$\Rightarrow \boxed{x^*(t)=-\tfrac{1}{4}t^2+1}$

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع(چند مثال):

مثال ۵-۴.۳ (ادامه):

$$J=\int_0^{t_f}[t\dot{x}(t)+\dot{x}^2(t)]dt \quad \leftrightarrow \quad x^*(t)=-\tfrac{1}{4}t^2+c_1t+c_2$$

حالت ج:

$x(0)=1 \rightarrow x^*(0)=c_2=1$

$t_f=free \rightarrow g(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f)-\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f),\dot{x}^*(t_f),t_f)\right]^T\dot{x}^*(t_f)=0$

$x(t_f)=5 \rightarrow \boxed{x^*(t_f)=-\tfrac{1}{4}t_f^{\,2}+c_1t_f+1=5}$

$\rightarrow t_f\dot{x}^*(t_f)+\dot{x}^{*2}(t_f)-(t_f+2\dot{x}^*(t_f))\dot{x}^*(t_f)=0 \rightarrow \dot{x}^*(t_f)=0$

$\rightarrow \boxed{\dot{x}^*(t_f)=-\tfrac{1}{2}t_f+c_1=0}$

$\rightarrow \boxed{c_1=2 \Rightarrow t_f=4} \Rightarrow \boxed{x^*(t)=-\tfrac{1}{4}t^2+2t+1}$

۴-۴- منحنی های اکسترمم هموار مقطعی (Piecewise-Smooth)

در بخش های گذشته منحنی ها به گونه ای در نظر گرفته می شدند که خود و مشتق مرتبه اولشان پیوسته باشند. این در حالیست که در کنترل لزوما این فرض همواره برقرار نخواهد بود (مثال: کنترل on-off) و این امر موجب می گردد که $\dot{x}(t)$ دارای یک و/یا چند ناپیوستگی گردد.

در این فصل منحنی هایی را در نظر می گیریم که دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته مقطعی باشند. به عبارت دیگر $\dot{x}(t)$ درفاصله زمانی محدود به تعداد محدودی ناپیوستگی داشته باشد.

- **تعریف**: در زمانهایی که $\dot{x}(t)$ ناپیوسته است، می گوییم که $x(t)$ دارای کرانه (corner) است.

۴-۴- منحنی های اکسترمم هموار مقطعی (Piecewise-Smooth)

به منظور بررسی مساله و ارائه روش ابتدا تابعی هایی که فقط شامل یک تابع هستند را در نظر می گیریم و فرض می کنیم در $t_1 \in (t_0, t_f)$ تابع $\dot{x}(t)$ ناپیوستگی دارد.

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

$$\longrightarrow \quad J(x) = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} g(x(t), \dot{x}(t), t)dt}_{J_1(x)} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t)dt}_{J_2(x)}$$

توجه: اگر $x^*(t)$ یک منحنی اکسترمم برای J باشد، آنگاه یک منحنی اکسترمم برای J_1 در $t \in (t_0, t_1)$ و یک منحنی اکسترمم برای J_2 در $t \in (t_1, t_f)$ می باشد.

۴-۴- منحنی های اکسترمم هموار مقطعی (Piecewise-Smooth)

با توجه به قضیه اساسی بهینه سازی و با توجه به شکل (۴-۱۶):

$$
\begin{aligned}
\delta J(x^*,\delta x) &= \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1^-),\dot{x}^*(t_1^-),t_1^-)\right]\delta x_1 + \left\{g(x^*(t_1^-),\dot{x}^*(t_1^-),t_1^-) - [\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1^-),\dot{x}^*(t_1^-),t_1^-)]\dot{x}^*(t_1^-)\right\}\delta t_1 \\
&+ \int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)]\right\}\delta x(t)dt \\
&- \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1^+),\dot{x}^*(t_1^+),t_1^+)\right]\delta x_1 - \left\{g(x^*(t_1^+),\dot{x}^*(t_1^+),t_1^+) - [\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1^+),\dot{x}^*(t_1^+),t_1^+)]\dot{x}^*(t_1^+)\right\}\delta t_1 \\
&+ \int_{t_1}^{t_f}\left\{\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)]\right\}\delta x(t)dt
\end{aligned}
$$

۴-۴- منحنی های اکسترمم هموار مقطعی (Piecewise-Smooth)

با توجه به اینکه $x^*(t)$ یک اکسترمم است و لازم است $\delta J(x^*,\delta x)=0$ برقرار باشد، آنگاه:

$$\boxed{\text{1) Euler Eq.}: \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)] = 0}$$

2) Marginally Condition :

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^-),t_1) - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^+),t_1)\right]\delta x_1 \\
&+ \left\{g(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^-),t_1) - [\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^-),t_1)]\dot{x}^*(t_1^-)\right. \\
&\left. - g(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^+),t_1) - [\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^+),t_1)]\dot{x}^*(t_1^+)\right\}\delta t_1 = 0
\end{aligned}
$$

۴-۴- منحنی های اکسترمم هموار مقطعی (Piecewise-Smooth)

در نتیجه شرایط مرزی را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود، که به شرایط کرانه ای Weierstass و Erdmann معروف است.

2) Weierstrass & Erdmann Corner conditions $[t_1, x(t_1):$ independent$]$:

$$\text{2.1.}\quad \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-), t_1) = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+), t_1)$$

$$\text{2.2.}\quad g(x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-), t_1) - [\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-), t_1)]\dot{x}^*(t_1^-)$$
$$= g(x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+), t_1) - [\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+), t_1)]\dot{x}^*(t_1^+)$$

توجه: در صورتی که منحنی مسیر در لحظات مختلف دارای کرانه باشد، آنگاه شرایط فوق لازم است در تمامی لحظات قطع صدق نماید.

65

۴-۴- منحنی های اکسترمم هموار مقطعی (Piecewise-Smooth)

اگر t_1 و $x(t_1)$ مستقل نباشند و دارای رابطه ای به صورت $x(t_1) = \theta(t_1)$ باشند، آنگاه:

2) Weierstrass & Erdmann Corner conditions $[x(t_1) = \theta(t_1) \Rightarrow \delta x_1 = \frac{\partial \theta}{\partial t}(t_1)\delta t_1]$:

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-), t_1)\right]\left[\frac{\partial \theta}{\partial t}(t_1) - \dot{x}^*(t_1^-)\right] + g(x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^-), t_1)$$
$$= \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+), t_1)\right]\left[\frac{\partial \theta}{\partial t}(t_1) - \dot{x}^*(t_1^+)\right] + g(x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1^+), t_1)$$

66

۴-۴- منحنی های اکسترمم هموار مقطعی (Piecewise-Smooth)

شرایط کرانه ای Weierstass و Erdmann در حالت برداری:

2) Weierstrass & Erdmann Corner conditions $[t_1, \mathbf{x}(t_1): \text{ independent}]$:

$$2.1.\quad \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^-), t_1) = \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^+), t_1)$$

$$2.2.\quad g(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^-), t_1) - [\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^-), t_1)]\dot{\mathbf{x}}^*(t_1^-)$$
$$= g(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^+), t_1) - [\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^+), t_1)]\dot{\mathbf{x}}^*(t_1^+)$$

67

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع(چند مثال):

مثال ۵-۴.۳: مطلوبست محاسبه یک منحنی اکسترمم هموار مقطعی برای می نیمم نمودن تابعی زیر و با نقطه ابتدا و انتهای ارائه شده:

$$J = \int_0^2 \dot{x}^2(t)[1-\dot{x}(t)]^2\,dt \qquad \begin{cases} x(0)=0 \\ x(2)=1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x(t),\dot{x}(t),t) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x(t),\dot{x}(t),t)\right] = 0 \;\rightarrow\; \frac{d}{dt}(4\dot{x}^3(t) - 6\dot{x}^2(t) + 2\dot{x}(t)) = 0$$

$$\rightarrow\quad x^*(t) = c_1 t + c_2 \quad\rightarrow\quad \begin{array}{l} x(0) = c_2 = 0 \\ x(2) = 2c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 0.5 \end{array}$$

$$\Rightarrow\quad \text{If } x(t): \text{continuse} \Rightarrow x^*(t) = -0.5t \;\rightarrow\; J = 0.125$$

68

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع(چند مثال):

مثال ۵-۴.۳ (ادامه):

$$J=\int_0^2 \dot{x}^2(t)[1-\dot{x}(t)]^2\,dt \qquad \begin{cases} x(0)=0 \\ x(2)=1 \end{cases} \qquad \boxed{x^*(t)=c_1t+c_2}$$

$$\text{W.E.2.1.}\quad \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^-),t_1)=\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^+),t_1)$$

$$\rightarrow\quad 2\dot{x}^*(t_1^-)\left(1-\dot{x}^*(t_1^-)\right)\left(1-2\dot{x}^*(t_1^-)\right)=2\dot{x}^*(t_1^+)\left(1-\dot{x}^*(t_1^+)\right)\left(1-2\dot{x}^*(t_1^+)\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\begin{cases} \dot{x}^*(t_1^-)=0,0.5,1 \\ \dot{x}^*(t_1^+)=0,0.5,1 \end{cases}}$$

69

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع(چند مثال):

مثال ۵-۴.۳ (ادامه):

$$J=\int_0^2 \dot{x}^2(t)[1-\dot{x}(t)]^2\,dt \qquad \begin{cases} x(0)=0 \\ x(2)=1 \end{cases} \qquad \boxed{x^*(t)=c_1t+c_2}$$

$$\text{W.E.2.2.}\quad g(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^-),t_1)-\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^-),t_1)\right]\dot{x}^*(t_1^-)$$
$$=g(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^+),t_1)-\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}(x^*(t_1),\dot{x}^*(t_1^+),t_1)\right]\dot{x}^*(t_1^+)$$

$$\rightarrow\quad \dot{x}^{*2}(t_1^-)\left(1-\dot{x}^*(t_1^-)\right)\left(3\dot{x}^*(t_1^-)-1\right)=\dot{x}^{*2}(t_1^+)\left(1-\dot{x}^*(t_1^+)\right)\left(3\dot{x}^*(t_1^+)-1\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\begin{cases} \dot{x}^*(t_1^-)=0,\tfrac{1}{3},1 \\ \dot{x}^*(t_1^+)=0,\tfrac{1}{3},1 \end{cases}} \;\Rightarrow\; \boxed{\text{W.E.Conditions}\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^*(t_1^-)=0 \quad \& \quad \dot{x}^*(t_1^+)=1 \\ \vee \\ \dot{x}^*(t_1^-)=1 \quad \& \quad \dot{x}^*(t_1^+)=0 \end{cases}}$$

70

۴-۳- تابعی های وابسته به چندتابع(چند مثال):

مثال ۵-۴.۳ (ادامه):

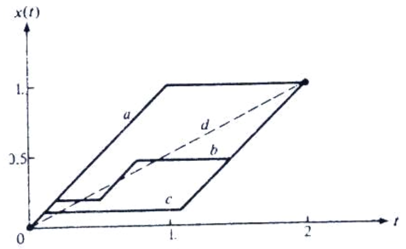
$$\begin{cases} x(0)=0 \\ x(2)=1 \end{cases}$$

$$J=\int_0^2 \dot{x}^2(t)[1-\dot{x}(t)]^2\,dt$$

$$\text{W.E. Conditions} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^*(t_1^-)=0 \quad \& \quad \dot{x}^*(t_1^+)=1 \\ \vee \\ \dot{x}^*(t_1^-)=1 \quad \& \quad \dot{x}^*(t_1^+)=0 \end{cases}$$

$$\boxed{x^*(t)=c_1t+c_2}$$

شکل (۱۷-۴):



شکل ۱۷-۴ منحنی های نهایت مثال ۱-۴.۴

باسمه تعالی

سیستم های کنترل بهینه

فصل پنجم:

روش تغییراتی در مسائل کنترل بهینه

1

فصل پنجم: روش تغییراتی در مسائل کنترل بهینه

مقدمه

- استفاده از روشهای حساب تغییرات در حل مسائل کنترل بهینه و اعمال آن به تابع معیارهایی که در فصل سوم گفته شد.

2

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

هدف یا مسأله

- یافتن قانون کنترل $\mathbf{u}^*$ که موجب می گردد سیستم

$$\dot{x}(t) = \mathbf{a}(x(t), u(t), t)$$

مسیر قابل قبول $\mathbf{x}^*$ را طی نماید و در طی آن تابعی معیار سیستم را که به صورت زیر است حداقل نماید.

$$J(\mathbf{u}) = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt \qquad (5.1\text{-}2)$$

$$t_0, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 : \text{defined}$$

3

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

تنها تفاوت مابین تابع معیار (۵.۱-۲) با توابع معیار مفروض در فصل چهارم وجود عبارت وضعیت نهایی است که به منظور حل این مشکل می توان به صورت زیر عمل نمود:

$$J(\mathbf{u}) = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt \qquad (5.1\text{-}2)$$

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \frac{d}{dt}[h(x(t), t)] \right\} dt + h(x(t_0), t_0)$$

$$t_0, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 : \text{defined}$$

4

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

در نتیجه عبارت شامل مقادیر اولیه در بهینه سازی تاثیر ندارد، همچنین با استفاده از قاعده زنجیره ای مشتق گیری:

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) + \left[\frac{\partial h(\mathbf{x}(t),t)}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial h(\mathbf{x}(t),t)}{\partial t} \right\} dt$$

اما در تابعی های فصل چهارم محدودیتی به صورت معادلات دیفرانسیل نبود لذا تابعی فوق را به صورت زیر تصحیح می نماییم.

$$J_a(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) + \left[\frac{\partial h(\mathbf{x}(t),t)}{\partial \mathbf{x}}\right]^T \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial h(\mathbf{x}(t),t)}{\partial t} \right.$$
$$\left. + \mathbf{P}^T(t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) - \dot{\mathbf{x}}(t)] \right\} dt$$

5

ضرایب لاگرانژ

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

در نتیجه مساله فرم جدیدی به خود گرفت:

$$J_a(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} \{ g_a(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{P}(t),t) \} dt$$

$$g_a(\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{P}(t),t) = g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) + \mathbf{P}^T(t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t) - \dot{\mathbf{x}}(t)]$$
$$+ \left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t),t)\right]^T \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}(t),t)$$

6

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

با توجه به (۱۶-۳.۴) خواهیم داشت:

$$\delta J_a(\mathbf{u}^*) = 0 = [\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f)]^T \delta\mathbf{x}_f$$
$$+\Big[g_a(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f)$$
$$-[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f)]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_f)\Big]\delta t_f$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}\Big\{\Big[[\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)]^T$$
$$-\frac{d}{dt}[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)]^T\Big]\delta\mathbf{x}(t)$$
$$+\left[\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)\right]^T \delta\mathbf{u}(t)$$
$$+\left[\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)\right]^T \delta\mathbf{p}(t)\Big\}dt$$

7

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

ابتدا جملاتی را که داخل انتگرال و شامل تابع h هستند بررسی نماییم:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left[\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),t)\right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t),t)\right] - \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\left\{\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),t)\right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t)\right\}\right]}_{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),t)\right]}$$

$$\rightarrow \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}^*(t),t)\right]\dot{\mathbf{x}}^*(t) + \frac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{x}\partial t}(\mathbf{x}^*(t),t) - \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}^*(t),t)\right]\dot{\mathbf{x}}^*(t) - \frac{\partial^2 h}{\partial t\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),t) = 0$$

لذا جملات داخل انتگرال به صورت زیر در خواهند آمد:

8

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

لذا جملات داخل انتگرال به صورت زیر در خواهند آمد:

$$\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)]^T+\mathbf{p}^{*T}(t)[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)]-\frac{d}{dt}[-\mathbf{p}^{*T}(t)]\right]\delta\mathbf{x}(t)\right.$$
$$+\left[\left[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)\right]^T+\mathbf{p}^{*T}(t)\left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)\right]\right]\delta\mathbf{u}(t)$$
$$\left.+\left[\mathbf{a}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)-\dot{\mathbf{x}}^*(t)\right]^T\delta\mathbf{p}(t)\right\}dt$$

به منظور دست یافتن به هر منحنی اکسترمم به صورت زیر، لازم است این انتگرال صفر گردد.

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t)=\mathbf{a}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)$$

State Equations

(5.1-14a)

9

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

با توجه به اینکه ضریب $\delta\mathbf{p}(t)$ در این معادله همان معادله منحنی اکسترمم است در نتیجه جمله آخر حذف خواهد شد و در نتیجه ضرایب لاگرانژ اختیاری خواهند بود و میتوان از آنها به منظور صفر نمودن ضرایب $\delta\mathbf{x}(t)$ استفاده کرد. در نتیجه:

$$\int_{t_0}^{t_f}\left\{\underbrace{\left[[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)]^T+\mathbf{p}^{*T}(t)[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)]-\frac{d}{dt}[-\mathbf{p}^{*T}(t)]\right]}_{\overset{?}{=}0}\delta\mathbf{x}(t)\right.$$
$$+\left[\left[\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)\right]^T+\mathbf{p}^{*T}(t)\left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)\right]\right]\delta\mathbf{u}(t)$$
$$\left.+\underbrace{\left[\mathbf{a}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)-\dot{\mathbf{x}}^*(t)\right]^T}_{=0}\underbrace{\delta\mathbf{p}(t)}_{\text{Arbitrary}}\right\}dt$$

10

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

لذا برای محاسبه ضرایب لاگرانژ خواهیم داشت:

: costate equations

$$\dot{\mathbf{p}}^{*T}(t) = -\left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)\right]^T \mathbf{p}^*(t) - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t) \qquad (5.1\text{-}14b)$$

همچنین در مورد ضرایب در جملات داخل انتگرال داریم:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t) + \left[\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),t)\right]^T \mathbf{p}^*(t) = 0 \qquad (5.1\text{-}14c)$$

11

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

اما در مورد جملات خارج انتگرال:

$$\delta J_a(\mathbf{u}^*) = 0 = [\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f),\dot{\mathbf{x}}^*(t_f),\mathbf{u}^*(t_f),\mathbf{p}^*(t_f),t_f)]^T \delta \mathbf{x}_f$$
$$+\left[g_a(\mathbf{x}^*(t_f),\dot{\mathbf{x}}^*(t_f),\mathbf{u}^*(t_f),\mathbf{p}^*(t_f),t_f) - [\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f),\dot{\mathbf{x}}^*(t_f),\mathbf{u}^*(t_f),\mathbf{p}^*(t_f),t_f)]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_f)\right]\delta t_f$$
$$+ \cdots$$

خواهیم داشت:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f) - \mathbf{p}^*(t_f)\right]^T \delta \mathbf{x}_f$$
$$+\left[g(\mathbf{x}^*(t_f),\mathbf{u}^*(t_f),t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f) + \mathbf{p}^{*T}(t_f)[\mathbf{a}(\mathbf{x}^*(t_f),\mathbf{u}^*(t_f),t_f)]\right]\delta t_f = 0 \qquad (5.1\text{-}15)$$

12

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

در نتیجه با تعریف تابع هامیلتونین میتوان معادلات (۱۴-۵.۱) و (۱۵-۵.۱) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{p}(t),t) \stackrel{\Delta}{=} g(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)+\mathbf{p}^T(t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)]$$

خواهیم داشت:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{p}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\mathbf{p}^*(t),t)\\ \dot{\mathbf{p}}(t) &= -\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\mathbf{p}^*(t),t)\\ &\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\mathbf{p}^*(t),t)=0\end{aligned}} \quad (5.1\text{-}17)$$

$$\boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)-\mathbf{p}^*(t_f)\right]^T\delta\mathbf{x}_f+\left[\mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t_f),\mathbf{u}^*(t_f),\mathbf{p}^*(t_f),t_f)+\frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)\right]\delta t_f=0}$$

13

(5.1-18)

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

شرایط حدی مختلف (۱):

$1-\ t_f$: cte & defined

$1.1-\mathbf{x}(t_f)$: cte & defined $\rightarrow \begin{cases}\delta\mathbf{x}_f=0\\ \delta t_f=0\end{cases} \Rightarrow \boxed{(5.1-18)\rightarrow\mathbf{x}^*(t_f)=x_f}$

$1.2-\mathbf{x}(t_f)$: free or undefined $\Rightarrow \boxed{(5.1-18)\rightarrow\frac{\partial h}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)-\mathbf{p}^*(t_f)=0}$

$1.3-\mathbf{x}(t_f)$: on the specific curve $\rightarrow \mathrm{m}(\mathbf{x}(t))=0$

مثالی که در ادامه می آید راهگشا خواهد بود.

14

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

شرایط حدی مختلف (ادامه-۱):

$$1.3-\mathbf{x}(t_f):\ \text{on the specific curve} \rightarrow \mathrm{m}(\mathbf{x}(t))=0$$

شکل (۱-۵)

$$\mathrm{m}(\mathbf{x}(t))=(x_1(t)-3)^2+(x_2(t)-4)^2-4=0$$

لازم است گرادیان **m** بر $\delta\mathbf{x}(t_f)$ عمود باشد:

$$\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f))=\begin{bmatrix}2(x_1^*(t_f)-3)\\ 2(x_2^*(t_f)-4)\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f))\right]^T\delta\mathbf{x}(t_f)=\begin{bmatrix}2(x_1^*(t_f)-3)\\ 2(x_2^*(t_f)-4)\end{bmatrix}^T\delta\mathbf{x}(t_f)=0$$

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

شرایط حدی مختلف (ادامه-۱):

$$\begin{bmatrix}2(x_1^*(t_f)-3)\\ 2(x_2^*(t_f)-4)\end{bmatrix}^T\delta\mathbf{x}(t_f)=\begin{bmatrix}2(x_1^*(t_f)-3) & 2(x_2^*(t_f)-4)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\mathbf{x}_1(t_f)\\ \delta\mathbf{x}_2(t_f)\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\quad \delta\mathbf{x}_2(t_f)=-\frac{(x_1^*(t_f)-3)}{(x_2^*(t_f)-4)}\delta\mathbf{x}_1(t_f)$$

$$\mathrm{m}(\mathbf{x}(t))=(x_1(t)-3)^2+(x_2(t)-4)^2-4=0$$

درنتیجه در این مثال معادله (۵.۱-۱۸) به این صورت خواهد بود:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)-\mathbf{p}^*(t)\right]^T\delta\mathbf{x}_f+\left[\mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\mathbf{p}^*(t),t)+\frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)\right]\delta t_f=0 \quad (5.1\text{-}18)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f))-\mathbf{p}^*(t_f)\right]^T\begin{bmatrix}1\\ -\dfrac{(x_1^*(t_f)-3)}{(x_2^*(t_f)-4)}\end{bmatrix}=0}$$

$$\boxed{\mathrm{m}(\mathbf{x}^*(t_f))=(x_1^*(t_f)-3)^2+(x_2^*(t_f)-4)^2-4=0}$$

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

شرایط حدی مختلف (ادامه-۱):

نکته جالب توجه از مقایسه دو معادله روبرو حاصل خواهد شد:

معادله (۱۸-۵.۱): $\rightarrow \left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f)) - \mathbf{p}^*(t)\right]^T \delta\mathbf{x}(t_f) = 0$

شرط عمود بودن گرادیان: $\rightarrow \left[\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f))\right]^T \delta\mathbf{x}(t_f) = 0$

$\downarrow$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f)) - \mathbf{p}^*(t_f) = [d_1 \quad \cdots \quad d_k]\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f)) \qquad 1 \le k \le n-1}$$

17

$$\boxed{\mathrm{m}(\mathbf{x}^*(t_f)) = 0}$$

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

شرایط حدی مختلف (۱):

$1-\ t_f$: cte & defined

$1.1-\mathbf{x}(t_f)$: cte & defined $\rightarrow \begin{cases}\delta\mathbf{x}_f = 0\\ \delta t_f = 0\end{cases} \Rightarrow \boxed{(5.1-18) \rightarrow \mathbf{x}^*(t_f) = x_f}$

$1.2-\mathbf{x}(t_f)$: free or undefined $\Rightarrow \boxed{(5.1-18) \rightarrow \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) - \mathbf{p}^*(t_f) = 0}$

$1.3-\mathbf{x}(t_f)$: on the specific curve $\rightarrow \mathrm{m}(\mathbf{x}(t)) = 0$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f)) - \mathbf{p}^*(t_f) = [d_1 \quad \cdots \quad d_k]\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f)) \qquad 1 \le k \le n-1}$$

18

$$\boxed{\mathrm{m}(\mathbf{x}^*(t_f)) = 0}$$

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

شرایط حدی مختلف (۲):

$2-\ t_f$: free or undefined

$2.1-\mathbf{x}(t_f)$: cte & defined

$$\rightarrow\ \delta\mathbf{x}_f = 0 \ \Rightarrow \boxed{\mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t_f),\mathbf{u}^*(t_f),\mathbf{p}^*(t_f),t_f)+\frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)=0}$$

$2.2-\mathbf{x}(t_f)$: free or undefined

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases}\mathbf{p}^*(t_f)=\dfrac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)\\ \mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\mathbf{p}^*(t),t)+\dfrac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)=0\end{cases}}$$

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

شرایط حدی مختلف (ادامه-۲):

$2-\ t_f$: free or undefined

$$2.3-\mathbf{x}(t_f)=\theta(t_f)\ \rightarrow\ \delta\mathbf{x}_f=\frac{\partial\theta}{\partial t}(t_f)\delta t_f$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)-\mathbf{p}^*(t_f)\right]^T\frac{\partial\theta}{\partial t}(t_f)+\left[\mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t),\mathbf{u}^*(t),\mathbf{p}^*(t),t)+\frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)\right]=0}$$

$$\boxed{\mathbf{x}^*(t_f)=\theta(t_f)}$$

$2.4-\mathbf{x}(t_f):\ \ \mathrm{m}(\mathbf{x}(t))=0$

مثالی که در ادامه می آید راهگشا خواهد بود.

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

شرایط حدی مختلف (ادامه-۲):

$2.4-\mathbf{x}(t_f)$: on the specific surface $\mathrm{m}(\mathbf{x}(t))=0$

شکل (۲-۵)

$$\mathrm{m}(\mathbf{x}(t))=(x_1(t)-3)^2+(x_2(t)-4)^2-4=0$$

با تقریب مرتبه اول $\mathbf{x}(t_f)$ بر سطح استوانه مماس است.

$$\Downarrow$$

$$\left[\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f))\right]^T \delta\mathbf{x}(t_f)=\begin{bmatrix}2(x_1^*(t_f)-3)\\2(x_2^*(t_f)-4)\end{bmatrix}^T \delta\mathbf{x}(t_f)=0$$

$\mathbf{x}(t_f)$ مستقل از δt_f است در نتیجه ضریب δt_f صفر باید باشد.

21

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

شرایط حدی مختلف (ادامه-۲):

$2-\ t_f$: free or undefined

$$2.4-\mathbf{x}(t_f):\ \ \mathrm{m}(\mathbf{x}(t))=0$$

$$\left[\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f))\right]^T \delta\mathbf{x}(t_f)=0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f))-\mathbf{p}^*(t)=[d_1\ \ \cdots\ \ d_k]\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f))\quad 1\le k\le n-1}$$

$$\boxed{\mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t_f),\mathbf{u}^*(t_f),\mathbf{p}^*(t_f),t_f)+\frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)=0}$$

$$\boxed{\mathrm{m}(\mathbf{x}^*(t_f))=0}$$

22

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

شرایط حدی مختلف (ادامه-۲):

$2-\quad t_f$: free or undefined

$2.5 - \mathbf{x}(t_f)$: on the time varient surface $\mathrm{m}(\mathbf{x}(t),t)=0$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f)) - \mathbf{p}^*(t) = [d_1 \quad \cdots \quad d_k]\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f)) \quad 1 \le k \le n-1}$$

$$\boxed{\mathscr{H}(\mathbf{x}^*(t_f),\mathbf{u}^*(t_f),\mathbf{p}^*(t_f),t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f) = [d_1 \quad \cdots \quad d_k]\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f)) \quad 1 \le k \le n-1}$$

$$\boxed{\mathrm{m}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)=0}$$

<u>خلاصه مطالب در جدول ۱-۵ در صفحه ۲۵۲و ۲۵۳ کتاب</u>

23

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

مثال ۱-۵.۱:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad J = \int_{t_0}^{t_f} \tfrac{1}{2}u^2(t)$$

$$\mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{p}(t)) = \tfrac{1}{2}u^2(t) + p_1(t)x_2(t) - p_2(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

(5.1-17b) $\Longrightarrow$
$$\boxed{\begin{cases} \dot{p}_1^*(t) = -\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{p}_2^*(t) = -\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_2} = -p_1^*(t) + p_2^*(t) \end{cases}}$$

(5.1-17c) $\Longrightarrow$
$$\boxed{\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u} = 0 = u^*(t) + p_2^*(t)}$$

24

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

مثال ۱-۵.۱ (ادامه):

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \tfrac{1}{2} u^2(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{p}_1^*(t) = -\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{p}_2^*(t) = -\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_2} = -p_1^*(t) + p_2^*(t) \end{cases}} \Longrightarrow \begin{array}{l} \dot{p}_1^*(t) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{p_1^*(t) = c_3} \\ \dot{p}_2^*(t) - p_2^*(t) = -c_3 \;\Rightarrow\; \underline{p_2^*(t) = c_3(1-e^t) + c_4 e^t} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial u} = 0 = u^*(t) + p_2^*(t)} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - p_2^*(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) - c_3(1-e^t) - c_4 e^t$$

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

مثال ۱-۵.۱ (ادامه):

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \tfrac{1}{2} u^2(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) - c_3(1-e^t) - c_4 e^t$$

$$\Longrightarrow \underline{x_2(t) = c_2 e^{-t} + c_3(-1 + \tfrac{1}{2} e^{-t} + \tfrac{1}{2} e^{t}) + c_4(\tfrac{1}{2} e^{-t} - \tfrac{1}{2} e^{t})}$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\underline{x_1(t) = c_1 + c_2(1-e^{-t}) + c_3(-t - \tfrac{1}{2} e^{-t} + \tfrac{1}{2} e^{t}) + c_4(1 - \tfrac{1}{2} e^{-t} - \tfrac{1}{2} e^{t})}$$

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

مثال ۱-۵.۱ (ادامه):

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_2(t)+u(t)\end{cases}\qquad J=\int_{t_0}^{t_f}\tfrac{1}{2}u^2(t)$$

حالت الف:

$$x(0)=0,\qquad x(2)=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$

$$x(0)=0 \;\Rightarrow\; c_1=c_2=0$$

$$x(2)=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{aligned}&x_1(t)=7.289t-6.103+6.696e^{-t}-0.593e^{t}\\ &x_2(t)=7.289t-6.696e^{-t}-0.593e^{t}\end{aligned}$$

27

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

مثال ۱-۵.۱ (ادامه):

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_2(t)+u(t)\end{cases}$$

حالت ب:

$$x(0)=0,\qquad x(2):\ free$$

New cost func.: $J=\frac{1}{2}\left(x_1(2)-5\right)^2+\frac{1}{2}\left(x_2(2)-2\right)^2+\int_{t_0}^{t_f}\frac{1}{2}u^2(t)$

$$\boxed{1.2\rightarrow \mathbf{p}^*(t_f)=\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)} \;\Rightarrow\; \begin{cases}p_1^*(t=2)=x_1^*(2)-5\\ p_2^*(t=2)=x_2^*(2)-2\end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases}c_3=-2.697\\ c_4=-2.422\end{cases}$$

$$x(0)=0 \;\Rightarrow\; c_1=c_2=0$$

28

$$\Rightarrow\; \begin{aligned}&x_1(t)=2.697t-2.422+2.5606e^{-t}-0.137e^{t}\\ &x_2(t)=2.697t-2.560e^{-t}-0.137e^{t}\end{aligned}$$

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

مثال ۱-۵.۱ (ادامه):

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=-x_2(t)+u(t)\end{cases}$$

حالت ج: $x(0)=0,\qquad x(2):\quad x_1(t)+5x_2(t)=15$

New cost func.: $J=\int_{t_0}^{t_f}\frac{1}{2}u^2(t)$

$$x(0)=0 \Rightarrow c_1=c_2=0$$

$$\boxed{1.3\rightarrow \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f),t_f)-\mathbf{p}^*(t_f)=d\frac{\partial m}{\partial \mathbf{x}}} \Rightarrow \begin{cases}-p_1^*(2)=d\\ -p_2^*(2)=5d\end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{m}(\mathbf{x}^*(t_f))=0} \Rightarrow x_1^*(2)+5x_2^*(2)=15 \Rightarrow \begin{cases}c_3=-0.894\\ c_4=-1.379\end{cases}$$

29

۵-۱: شرایط لازم برای کنترل بهینه

مثال ۲-۵.۱ بررسی و معادلات بدست آمده مجددا محاسبه گردد.

30

۵-۲: تنظیم کننده خطی

- بررسی مساله تنظیم کننده خطی در سیستم های خطی متغیر با زمان
- بررسی حالت خاص برای سیستم های LTI
- بر اساس روشهای پیشنهادی کالمن

31

۵-۲: تنظیم کننده خطی

- مدل سیستم: خطی متغیر با زمان

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$$

- تابع هزینه برای تنظیم کننده خطی:

$$J = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{H}\mathbf{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)]dt$$

در نتیجه هامیلتونین عبارت خواهد بود از:

$$\mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{p}(t),t) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \tfrac{1}{2}\mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{p}^T(t)A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}^T(t)B(t)\mathbf{u}(t)$$

32

۵-۲: تنظیم کننده خطی

$$\mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{p}(t),t) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \tfrac{1}{2}\mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{p}^T(t)A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}^T(t)B(t)\mathbf{u}(t)$$

- شرایط لازم بهینگی:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = A(t)\mathbf{x}^*(t) + B(t)\mathbf{u}^*(t)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}^*(t) - A^T(t)\mathbf{p}^*(t)$$

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{u}^*(t) + B^T(t)\mathbf{p}^*(t) = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{p}^*(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}^*(t) = A(t)\mathbf{x}^*(t) - B(t)\mathbf{R}^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{p}^*(t)$$

33

۵-۲: تنظیم کننده خطی

- شرایط لازم بهینگی (جمع بندی):

$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}^*(t)\\ \dot{\mathbf{p}}^*(t)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}A(t) & -B(t)\mathbf{R}^{-1}(t)B^T(t)\\ -\mathbf{Q}(t) & -A^T(t)\end{bmatrix}}_{A_a}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^*(t)\\ \mathbf{p}^*(t)\end{bmatrix}}$$

- پاسخ این معادله به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}^*(t_f)\\ \mathbf{p}^*(t_f)\end{bmatrix} = \varphi(t_f,t)\begin{bmatrix}\mathbf{x}^*(t)\\ \mathbf{p}^*(t)\end{bmatrix} \qquad (5.2\text{-}10)$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}^*(t_f)\\ \mathbf{p}^*(t_f)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\varphi_{11}(t_f,t) & \varphi_{12}(t_f,t)\\ \varphi_{21}(t_f,t) & \varphi_{22}(t_f,t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^*(t)\\ \mathbf{p}^*(t)\end{bmatrix} \longleftrightarrow \quad \varphi_{ij}:\ n\times n \text{ matrices} \qquad (5.2\text{-}10a)$$

34

۵-۲: تنظیم کننده خطی

در نتیجه:

$$\boxed{\mathbf{p}^*(t) = \underbrace{\left[\varphi_{22}(t_f,t) - \mathbf{H}\varphi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[\mathbf{H}\varphi_{11}(t_f,t) - \varphi_{21}(t_f,t)\right]}_{\mathbf{K}(t)}\mathbf{x}^*(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{p}^*(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}^*(t)$$

با جایگزینی در معادله روبرو:

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)B(t)\mathbf{p}^*(t)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{u}^*(t) = \underbrace{-\mathbf{R}^{-1}(t)B(t)\mathbf{K}(t)}_{\triangleq \mathbf{F}(t)}\mathbf{x}^*(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}^*(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}^*(t)$$

همانگنه که مشخص است قانون کنترل بهینه قانونی است خطی، متغیر بازمان و ترکیبی از وضعیت های سیستم.

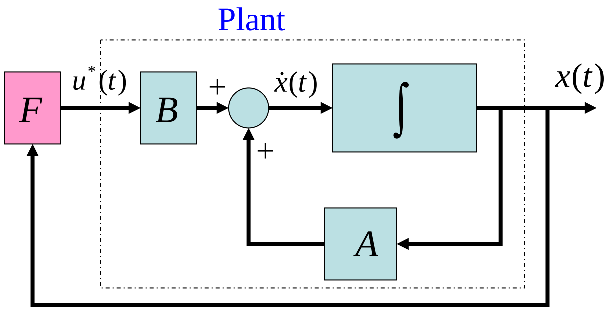
35

۵-۲: تنظیم کننده خطی

در نتیجه:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = A(t)\mathbf{x}^*(t) + B(t)\mathbf{u}^*(t)$$

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}^*(t)$$



36

۵-۲: تنظیم کننده خطی

نحوه محاسبه ماتریس $\mathbf{K}(t)$

- روش اول: محاسبه ماتریس انتقال حالت

$$\boxed{\mathbf{K}(t)=\left[\varphi_{22}(t_f,t)-\mathbf{H}\varphi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[\mathbf{H}\varphi_{11}(t_f,t)-\varphi_{21}(t_f,t)\right]}$$

$$\varphi(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\left[sI-\underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}}_{A_a}\right]^{-1}\right\} \longleftrightarrow \varphi(t_f,t)=\varphi(t=t_f-t)$$

- روش دوم: حل معادله ریکاتی

$$\boxed{\dot{\mathbf{K}}(t)=-\mathbf{K}(t)A(t)-A^T(t)\mathbf{K}(t)-Q(t)+\mathbf{K}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{K}(t)}$$

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۱-۵.۲):

$$\dot{x}(t)=ax(t)+u(t) \qquad a=-0.2$$

$$J(u)=\tfrac{1}{2}Hx^2(T)+\int_0^T \tfrac{1}{4}u^2(t)dt$$

T: defined

H: P.D.

$x(T)$: free

$$A_a=\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \longleftrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{[sI-A_a]^{-1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2-a^2)}\begin{bmatrix} s+a & -2 \\ 0 & s-a \end{bmatrix}\right\}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(t)=\begin{bmatrix} e^{at} & \frac{1}{a}e^{-at}-\frac{1}{a}e^{at} \\ 0 & e^{-at} \end{bmatrix}$$

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال ۱-۵.۲(ادامه):

$$\boxed{\mathbf{K}(t)=\left[\varphi_{22}(t_f,t)-\mathbf{H}\varphi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[\mathbf{H}\varphi_{11}(t_f,t)-\varphi_{21}(t_f,t)\right]}$$

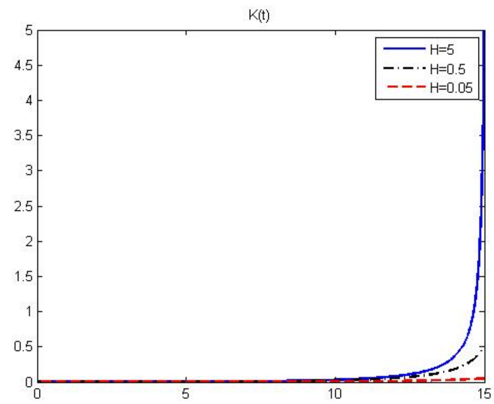
$$\Longrightarrow\quad K(t)=\left[e^{-a(T-t)}-\tfrac{H}{a}\left(e^{-a(T-t)}-e^{a(T-t)}\right)\right]^{-1}\left[He^{a(T-t)}\right]$$

$$\mathbf{u}^*(t)=\underbrace{-\mathbf{R}^{-1}(t)B(t)\mathbf{K}(t)}_{\triangleq\mathbf{F}(t)}\mathbf{x}^*(t)\quad\rightarrow\quad\mathbf{u}^*(t)=-2K(t)\mathbf{x}(t)$$

39

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال ۱-۵.۲(ادامه):

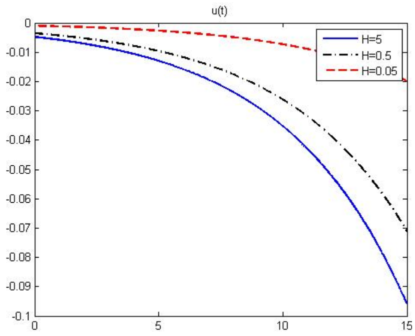


شکل (۵-۷a)

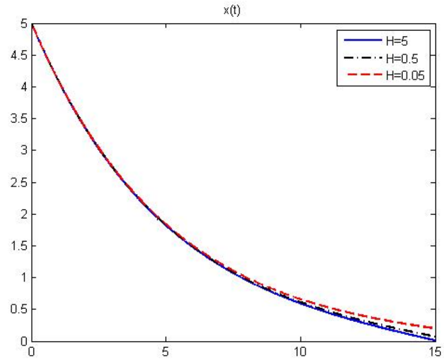
40

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال ۱-۵.۲(ادامه):



شکل (۵-۷b)

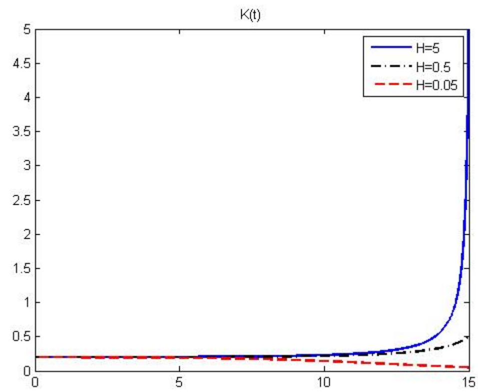


شکل (۵-۷c)

41

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال ۱-۵.۲(ادامه): **اگر** $a = 0.2$ **باشد یا به عبارت دیگر سیستم ناپایدار باشد.**

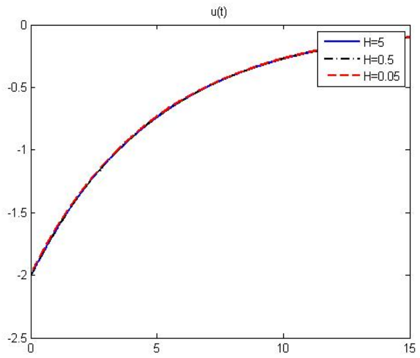


42

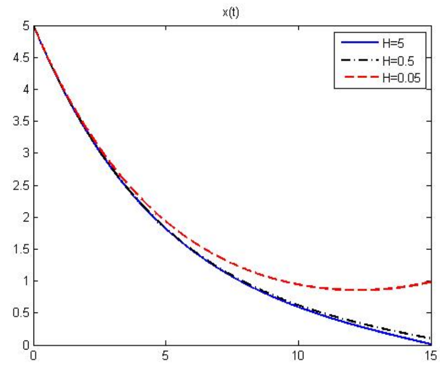
شکل (۵-۸a)

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال ۱-۵.۲(ادامه): $a = 0.2$



شکل (۵-۸b)



شکل (۵-۸c)

43

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۲-۵.۲):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

$$J(u) = \int_0^T \left[x_1^2(t) + \tfrac{1}{2} x_2^2(t) + \tfrac{1}{4} u^2(t) \right] dt$$

$T:$ defined
$H:$ P.D.
$x(T):$ free

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \frac{1}{2}$$

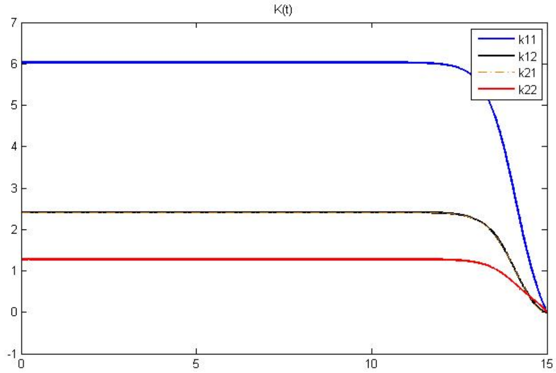
$$\Longrightarrow \quad A_a = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

44

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۲-۲.۵) (ادامه):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad J(u) = \int_0^T \left[x_1^2(t) + \tfrac{1}{2} x_2^2(t) + \tfrac{1}{4} u^2(t) \right] dt$$

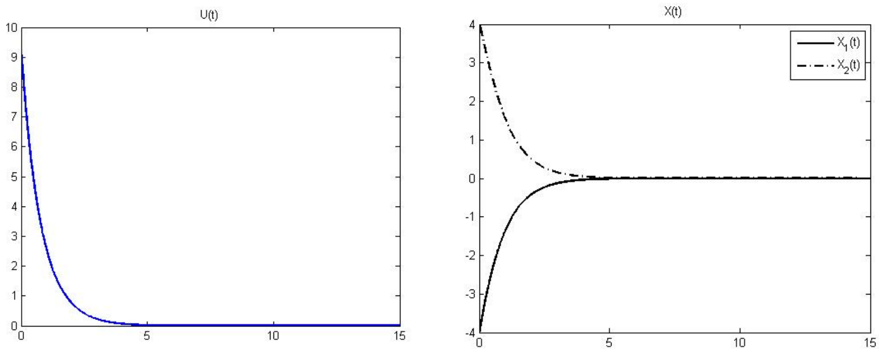


45

شکل (۵-۹a)

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۲-۲.۵) (ادامه):



شکل های (۵-۹b)

46

۵-۲: تنظیم کننده خطی

شرایط طراحی فیدبک حالت بهینه یا حل معادله ریکاتی:

- سیستم کنترل پذیر باشد.

شرایطی که موجب می گردد ماتریس K(t) در صورت وجود زمان کافی به یک ماتریس ثابت میل نماید:

سیستم کنترل پذیر باشد.

- ماتریس H=0
- ماتریس های A, B, R, Q ثابت باشند.

در این حالت معادله ریکاتی به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\mathbf{K}(t)A(t)+A^T(t)\mathbf{K}(t)+Q(t)-\mathbf{K}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{K}(t)=0}$$

47

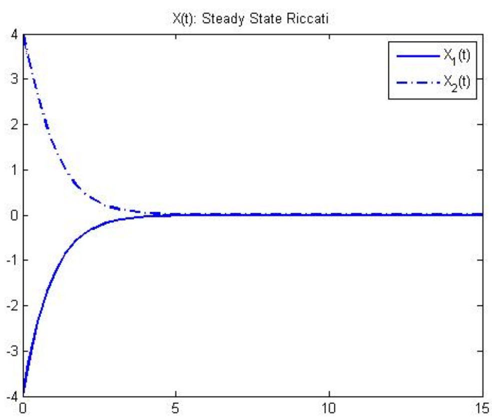
۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۲-۵.۲) (ادامه):

$$\boxed{\mathbf{K}(t)A(t)+A^T(t)\mathbf{K}(t)+Q(t)-\mathbf{K}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{K}(t)=0}$$

$$\downarrow$$

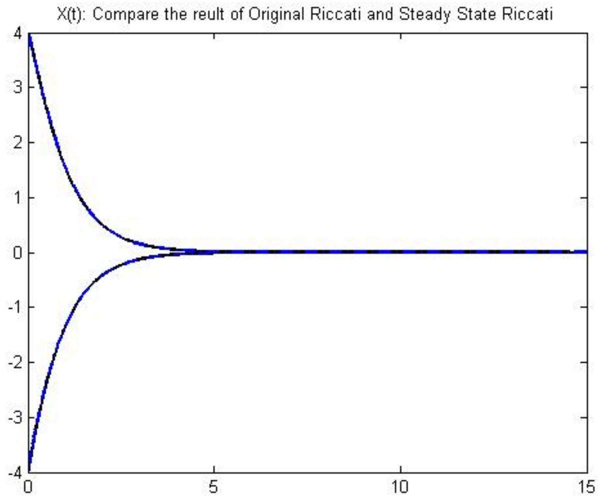
$$K_{ss}=\begin{bmatrix}6.0313 & 2.4142\\ 2.4142 & 1.2788\end{bmatrix}$$



48

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۲-۲.۵) (ادامه):



49

۵-۳: تعقیب کننده های خطی

- **مدل سیستم: خطی متغیر با زمان**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$$

- **تابع هزینه برای تعقیب کننده خطی:**

$$J = \frac{1}{2}[\mathbf{x}(t_f) - r(t_f)]^T \mathbf{H}[\mathbf{x}(t_f) - r(t_f)] + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \{[\mathbf{x}(t) - r(t)]^T \mathbf{Q}(t)[\mathbf{x}(t) - r(t)] + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{u}(t)]\} dt$$

در نتیجه هامیلتونین عبارت خواهد بود از:

$$\mathscr{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) = \tfrac{1}{2}\|\mathbf{x}(t) - r(t)\|^2_{Q(t)} + \tfrac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{R(t)} + \mathbf{p}^T(t)A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{p}^T(t)B(t)\mathbf{u}(t)$$

50

۵-۳: تعقیب کننده های خطی

$$\mathscr{H}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{p}(t),t)=\tfrac{1}{2}\|\mathbf{x}(t)-r(t)\|^2_{Q(t)}+\tfrac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{R(t)}+\mathbf{p}^T(t)A(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{p}^T(t)B(t)\mathbf{u}(t)$$

- شرایط لازم بهینگی:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t)=A(t)\mathbf{x}^*(t)+B(t)\mathbf{u}^*(t)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t)=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{x}}=-\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}^*(t)-A^T(t)\mathbf{p}^*(t)+Q(t)r(t)$$

$$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{u}}=\mathbf{R}(t)\mathbf{u}^*(t)+B^T(t)\mathbf{p}^*(t)=0 \quad\longrightarrow\quad \mathbf{u}^*(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{p}^*(t)$$

$$\Rightarrow\quad \dot{\mathbf{x}}^*(t)=A(t)\mathbf{x}^*(t)-B(t)\mathbf{R}^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{p}^*(t)$$

51

۵-۳: تعقیب کننده های خطی

- شرایط لازم بهینگی (جمع بندی):

$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}^*(t)\\ \dot{\mathbf{p}}^*(t)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}A(t) & -B(t)\mathbf{R}^{-1}(t)B^T(t)\\ -\mathbf{Q}(t) & -A^T(t)\end{bmatrix}}_{A_a}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^*(t)\\ \mathbf{p}^*(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ Q(t)r(t)\end{bmatrix}} \qquad (5.2\text{-}34)$$

- پاسخ این معادله به شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}^*(t_f)\\ \mathbf{p}^*(t_f)\end{bmatrix}=\varphi(t_f,t)\begin{bmatrix}\mathbf{x}^*(t)\\ \mathbf{p}^*(t)\end{bmatrix}+\int_t^{t_f}\varphi(t_f,\tau)\begin{bmatrix}0\\ Q(\tau)r(\tau)\end{bmatrix}d\tau \qquad (5.2\text{-}35)$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}^*(t_f)\\ \mathbf{p}^*(t_f)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t_f,t) & \varphi_{12}(t_f,t)\\ \varphi_{21}(t_f,t) & \varphi_{22}(t_f,t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^*(t)\\ \mathbf{p}^*(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{bmatrix} \qquad (5.2\text{-}36)$$

52

۵-۳: تعقیب کننده های خطی

- از طرفی با توجه به شرایط حدی :

$$\mathbf{p}^*(t_f)=\mathbf{H}\mathbf{x}^*(t_f)-\mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)$$

- با جایگزینی در معادله (۵.۲-۳۶)داریم:

$$\mathbf{x}^*(t_f)=\varphi_{11}(t_f,t)\mathbf{x}^*(t)+\varphi_{12}(t_f,t)\mathbf{p}^*(t)+f_1(t)$$

$$\mathbf{H}\mathbf{x}^*(t_f)-\mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)=\varphi_{21}(t_f,t)\mathbf{x}^*(t)+\varphi_{22}(t_f,t)\mathbf{p}^*(t)+f_2(t)$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}\left[\varphi_{11}(t_f,t)\mathbf{x}^*(t_f)+\varphi_{12}(t_f,t)\mathbf{p}^*(t)+f_1(t)\right]-\mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)=\varphi_{21}(t_f,t)\mathbf{x}^*(t)+\varphi_{22}(t_f,t)\mathbf{p}^*(t)+f_2(t)$$

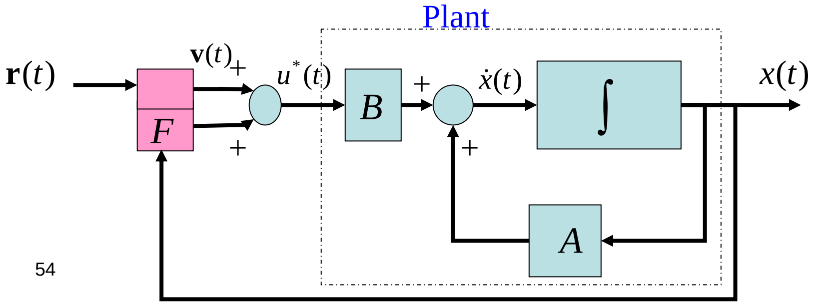
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\mathbf{p}^*(t)=&\left[\varphi_{22}(t_f,t)-\mathbf{H}\varphi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[\mathbf{H}\varphi_{11}(t_f,t)-\varphi_{21}(t_f,t)\right]\mathbf{x}^*(t)\\&+\left[\varphi_{22}(t_f,t)-\mathbf{H}\varphi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[\mathbf{H}f_1(t)-\mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)-f_2(t)\right]\end{aligned}}$$

۵-۳: تعقیب کننده های خطی

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{p}^*(t)=&\left[\varphi_{22}(t_f,t)-\mathbf{H}\varphi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[\mathbf{H}\varphi_{11}(t_f,t)-\varphi_{21}(t_f,t)\right]\mathbf{x}^*(t)\\&+\left[\varphi_{22}(t_f,t)-\mathbf{H}\varphi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[\mathbf{H}f_1(t)-\mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)-f_2(t)\right]\quad=\mathbf{K}(t)\mathbf{x}^*(t)+\mathbf{s}(t)\end{aligned}}$$

- در نتیجه قانون کنترل بهینه عبارت است از:

$$\mathbf{u}^*(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{x}^*(t)-\mathbf{R}^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{s}(t)\overset{\Delta}{=}\mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{v}(t)$$



۵-۳: تعقیب کننده های خطی

- همچنین معادله ریکاتی عبارت خواهد بود از:

$$\boxed{\begin{cases}\dot{\mathbf{K}}(t)=-\mathbf{K}(t)A(t)-A^T(t)\mathbf{K}(t)-Q(t)+\mathbf{K}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{K}(t)\\ \wedge \\ \dot{\mathbf{s}}(t)=-\left[A^T(t)-\mathbf{K}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\right]\mathbf{s}(t)+Q(t)\mathbf{r}(t)\end{cases}}$$

$$\mathbf{p}^*(t_f)=\mathbf{H}\mathbf{x}^*(t_f)-\mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)=\mathbf{K}(t_f)\mathbf{x}^*(t_f)+\mathbf{s}(t_f)\Longrightarrow\begin{cases}\mathbf{K}(t_f)=\mathbf{H}\\ \mathbf{s}(t_f)=-\mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)\end{cases}$$

55

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۳-۵.۲):

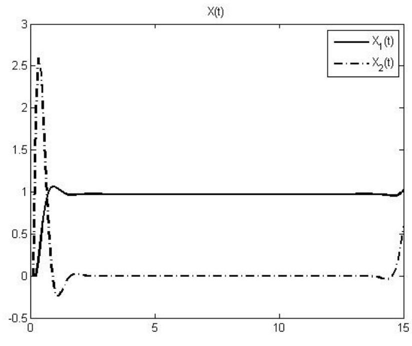
$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{p}^*(t)&=\underbrace{\left[\varphi_{22}(t_f,t)-\mathbf{H}\varphi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[\mathbf{H}\varphi_{11}(t_f,t)-\varphi_{21}(t_f,t)\right]}_{K(t)}\mathbf{x}^*(t)\\ &+\underbrace{\left[\varphi_{22}(t_f,t)-\mathbf{H}\varphi_{12}(t_f,t)\right]^{-1}\left[\mathbf{H}f_1(t)-\mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)-f_2(t)\right]}_{\mathbf{s}(t)}\end{aligned}}$$

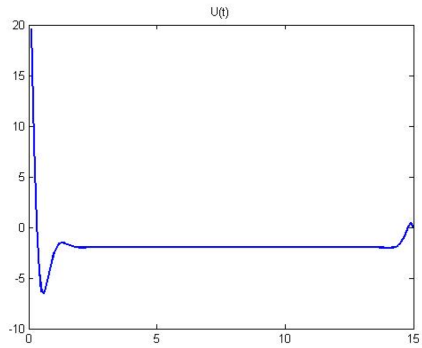
$$f(t)=\int_t^{t_f}\varphi(t_f,\tau)\begin{bmatrix}0\\ Q(\tau)r(\tau)\end{bmatrix}d\tau=\int_t^{t_f}\varphi(t_f,\tau)\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}d\tau\longrightarrow f=f+T_s*\varphi(t_f,\tau)\begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}$$

56

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۳-۵.۲):

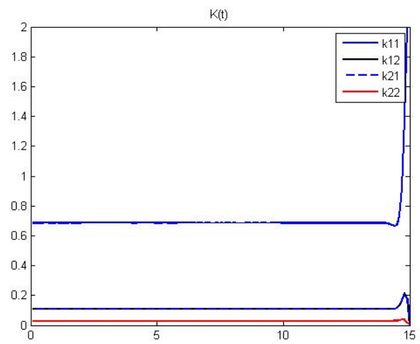




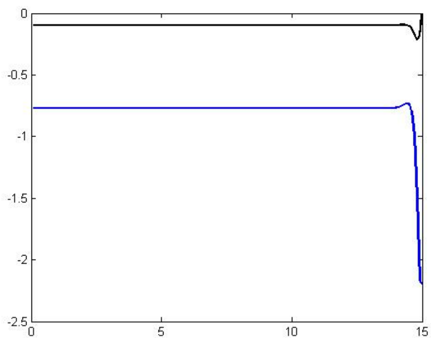
شکل های (a۱۱-۵)

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۳-۵.۲):



شکل های (b۱۱-۵)



شکل های (c۱۱-۵)

۵-۳: تعقیب کننده های خطی

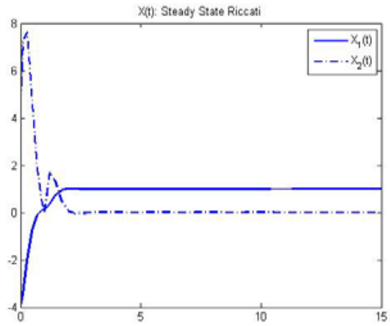
مثال (۳-۲.۵):

- همچنین معادله ریکاتی در حالت ماندگار:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{ss}A(t)+A^T(t)\mathbf{K}_{ss}+Q(t)-\mathbf{K}_{ss}B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{K}_{ss}=0 \\ \wedge \\ \mathbf{s}=\underbrace{\left[A^T(t)-\mathbf{K}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\right]^{-1}Q(t)}_{S_s}\mathbf{r}(t) \end{cases}$$

$$K_{ss}=\begin{bmatrix}0.6875 & 0.1105\\ 0.1105 & 0.0286\end{bmatrix}$$

$$S_s=\begin{bmatrix}-0.6690 & 0\\ 0.0995 & 0\end{bmatrix}$$

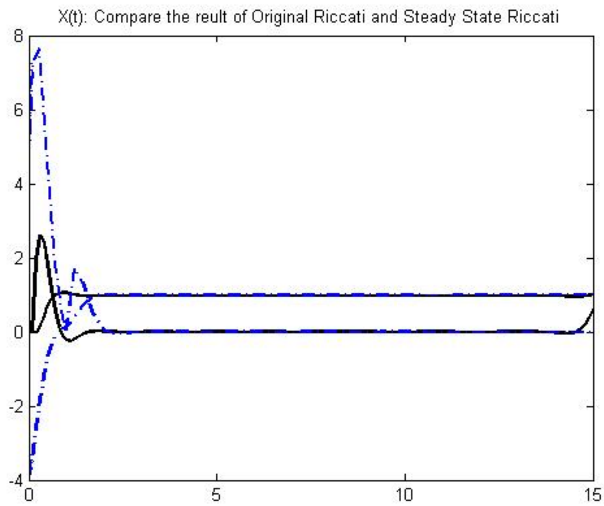


59

۵-۳: تعقیب کننده های خطی

مثال (۳-۲.۵):

- مقایسه پاسخ ها در دو حالت طراحی:



60

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۴-۵.۲):

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + u(t)\end{cases}$$

$$J(u) = \int_0^T \left[[x_1(t) - 0.2t]^2 + 0.025u^2(t) \right] dt$$

$T:$ defined
$x(T):$ free

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = 0.05$$

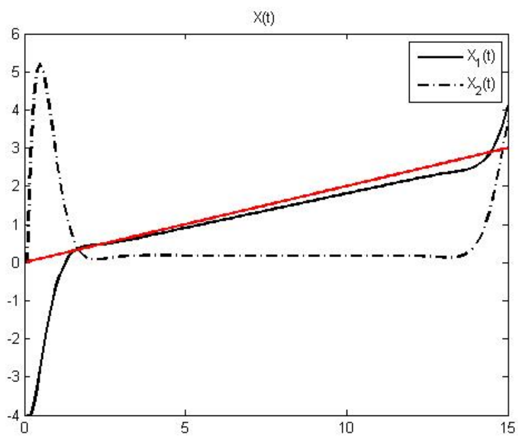
$$\Longrightarrow \quad A_a = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -20 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

61

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۴-۵.۲):

$$J(u) = \int_0^T \left[[x_1(t) - 0.2t]^2 + 0.025u^2(t) \right] dt$$

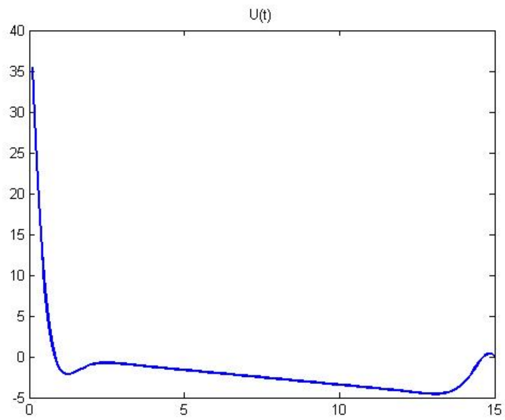


62

شکل های (۵-۱۲a)

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۴-۵.۲):

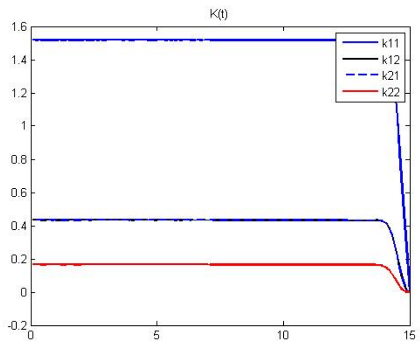


شکل های (۵-۱۲a)

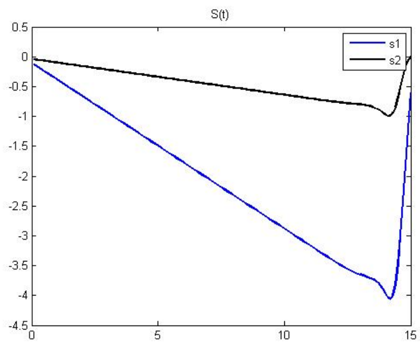
63

۵-۲: تنظیم کننده خطی

مثال (۴-۵.۲):



شکل های (۵-۱۲b)



شکل های (۵-۱۲c)

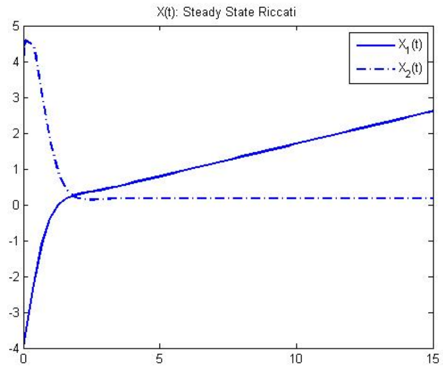
64

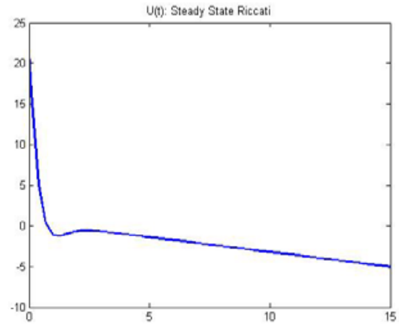
۵-۳: تعقیب کننده های خطی

مثال (۴-۵.۲):

- همچنین معادله ریکاتی در حالت ماندگار:

$$K_{ss} = \begin{bmatrix} 1.5175 & 0.4317 \\ 0.4317 & 0.1637 \end{bmatrix} \qquad S_s = \begin{bmatrix} -1.2886 & 0 \\ -0.3015 & 0 \end{bmatrix}$$



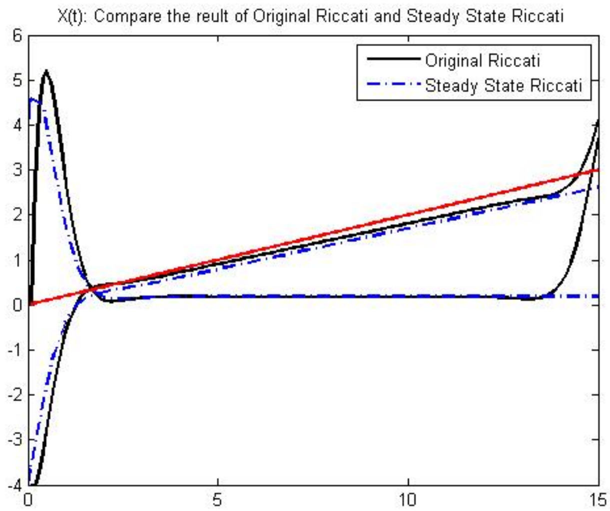


65

۵-۳: تعقیب کننده های خطی

مثال (۴-۵.۲):

- مقایسه پاسخ ها در دو حالت طراحی:



66