باسمه تعالی

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

بیژن معاونی

(استادیار دانشگاه علم و صنعت ایران)

۸۸-۸۹

باسمه تعالی

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 1

مقدمه

مقدمه

- یکی از مهمترین مشکلات در علوم مهندسی تخمین متغیرهای کمی با استفاده از اندازه گیری ها است.

- تخمین شامل موارد زیر می گردد:

  – تخمین سیگنال بر اساس اندازه گیری های نویزی.
  – تخمین حالت های سیستم بر اساس اندازه گیری های نویزی خروجی و حالت ها.
  – تخمین پارامترهای یک تابع.

مقدمه

- **کاربرد تئوری تخمین:**
  - سیستم های هوا-فضا
  - مخابرات
  - صنایع تولیدی
  - مهندسی پزشکی

- **مثالهایی از کاربرد عملی تخمین:**
  - تخمین موقعیت یا سرعت واقعی هواپیما بر اساس موقعیت اندازه گیری شده توسط رادار.
  - تخمین پارامترهای یک فرآیند در یک سیستم تولیدی.
  - تخمین ضربان قلب یک فرد با استفاده از سیگنال ECG.

تخمین سیگنال

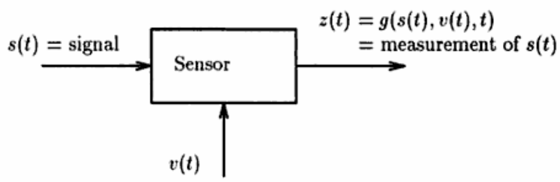
$s(t)$: Signal   تابعی حقیقی از متغیر پیوسته زمان t

$z(t)$ سیگنال تولید شده از $s(t)$ که بیان ریاضی آن عبارت است از:

$$z(t) = g\left(s(t), v(t), t\right)$$

$v(t)$: noise or disturbance

به عنوان مثال $z(t)$ می توان سیگنال یا مقادیر اندازه گیری شده از سیگنال $s(t)$ توسط سنسور باشد.



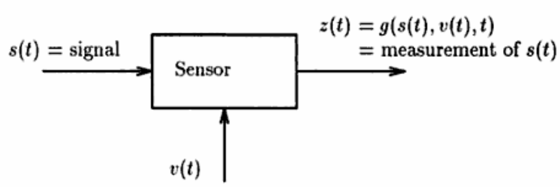
تخمین سیگنال

در بسیاری از کاربردها فرم ساده تری از مقدار اندازه گیری شده بر حسب سیگنال و نویز ارائه می گردد که عبارت است از:

$$z(t) = s(t) + v(t)$$

در این حالت نویز به صورت جمع شونده با سیگنال ترکیب می شود.

این نویز می تواند ناشی از تغییرات فیزیکی سنسور مانند گرما و/یا ناشی از یک منبع خارجی باشد.



تخمین سیگنال

یکی از مثال های مهم در مدل نویز جمع شونده مساله تعقیب هدف (**Target Tracking**) است. که سیگنال اندزه گیری شده از روی رادار کاملا نویزی است و نویز ان از نوع جمع شونده در نظر گرفته می شود. از دیگر مثال های این نوع توصیف سیگنال های **ECG** و **EEG** است.

$$z(t) = s(t) + v(t)$$

اگر چه نویز جمع شونده مهمترین روش توصیف اثر نویز بر سیگنال است که علت آن را میتوان سهولت در تحلیل دانست. ولیکن تنها روش نبوده و اثرات تمامی نویز ها را نیز به این روش نمی توان توصیف نمود.

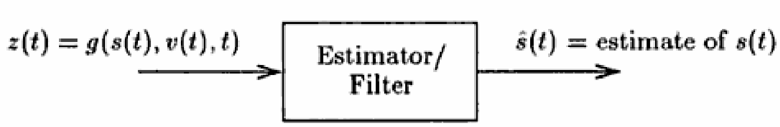
از دیگر روشهای توصیف اثر نویز بر سیگنال، می توان نویز ضربی را نام برد:

$$z(t) = s(t).v(t)$$

تخمین سیگنال

یکی از مسائل مهم در علوم و مهندسی باز سازی سیگنال واقعی $s(t)$ با استفاده از سیگنال اندازه گیری $z(t)$ است. که این مساله را یک نوع مساله **تخمین** و/یا **فیلترینگ** است.

ابزاری را نیز که تخمین سیگنال $s(t)$ را تولید مینماید نیز تخمینگر یا فیلتر نامیده می شود.



تخمینگر (*Estimator*)

همانطور که در رویتگرها نیز مشخص بود، بطور کلی تخمینگر یک سیستم دینامیکی است. مقدار تخمین زده شده $\hat{s}(t)$ در زمان t به صورت یک تابع ساده از $z(t)$ در زمان t قابل بیان نیست.

بلکه مقدار تخمینی تابعی از مقادیر $z(\tau)$ در یک بازه خاص τ می باشد.

Causal Estimator:

$$\hat{s}(t) = \alpha\left(\left\{z(\tau) : -\infty < \tau \le t\right\}, t\right)$$

Non-Causal Estimator:

$$\hat{s}(t) = \alpha\left(\left\{z(\tau) : -\infty < \tau \le t + a\right\}, t\right)$$

Where, $a > 0$

تخمینگر خطی (*Linear Estimator*)

تخمینگر های علی ارائه شده خطی است اگر و فقط اگر تابع α خطی باشد. در این حالت مقدار تخمینی $\hat{s}(t)$ به صورت زیر قابل بیان خواهد بود.

Causal Linear Estimator:

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t,\tau) z(\tau) d\tau$$

که $h(t,\tau)$ پاسخ ضربه تابع تخیمینگر می باشد.

Non-Causal Estimator:

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{t+a} h(t,\tau) z(\tau) d\tau$$

Where, $a > 0$

تخمینگرهای غیر علی به صورت **real time** قابل استفاده نیستند و فقط در محاسبات **off-line** کاربرد دارند.

تخمینگر خطی نامتغیر با زمان (*LTI Estimator*)

تخمینگر های خطی ارائه شده در اسلاید قبلی متغیر با زمان هستند.

در صورتی این تخمینگرها خطی نامتغیر با زمان (LTI) خواهند بود اگر و فقط اگر تابع تخمینگر $h(t,\tau)$ به صورت تابعی از تفاضل $t-\tau$ قابل بیان باشد.

به عبارت دیگر

$$h(t,\tau)=h(t-\tau)$$

که $h(t)$ پاسخ ضربه تخیمینگر است در زمان t به ازای اعمال تابع ضربه $\delta(t)$ در $t=0$.

Linear Causal Time-invariant Estimator:

$$\hat{s}(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)z(\tau)d\tau \underset{convolution}{=} h(t)*z(t)$$

توصیف فرکانسی تخمینگر خطی نامتغیر با زمان

با استفاده از تبدیل فوریه:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt$$

که ω متغیر فرکانس برحسب رادیان بر ثانیه است.

در نتیجه:

$$\hat{S}(\omega)=H(\omega)Z(\omega)$$

که پاسخ فرکانسی تابع تبدیل تخمینگر می باشد.

طراحی تخمینگر

با توجه به معادلات ارائه شده برای تخمینگر، طراحی تخمینگر خطی عبارت خواهد بود از تعیین تابع $h(t,\tau)$.

اگر تخمینگر خطی نامتغیر با زمان درنظر گرفته شود تعیین $h(t)$ یا $H(\omega)$ کفایت خواهد کرد.

با فرض اینکه $z(t) = s(t) + v(t)$ است رابطه ورودی-خروجی تخمینگر خطی به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\left[s(\tau) + v(\tau)\right] d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau) s(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau) v(\tau) d\tau$$

طراحی تخمینگر

اگر تخمینگر خطی نامتغیر با زمان درنظر گرفته شود معادلات قبلی در حوزه فرکانس به صورت زیر قابل بیان خواهد بود:

$$\hat{S}(\omega) = H(\omega)S(\omega) + H(\omega)V(\omega)$$

این معادلات نشان می دهد که طراحی تخمینگر لازم است به گونه ای انجام پذیرد که نویز $v(t)$ را دفع کرده و سیگنال $s(t)$ را عبور دهد. به عبارت دیگر تخمینگر لازم است در حوزه فرکانس به گونه ای طراحی شود که:

$$H(\omega)S(\omega) = S(\omega)$$
$$H(\omega)V(\omega) = 0$$

معادلات فوق در صورتی کاملا برآورده می گردند که پاسخ فرکانسی نویز و سیگنال اشتراکی نداشته باشند.

طراحی تخمینگر

به هر حال موارد زیادی وجود دارد که طراحی تخمینگر بر اساس ایده پاسخ فرکانسی سیگنال و نویز امکان پذیر نیست . در این حالت روشهای پیشرفته تخمین لازم است که ما را به سمت طراحی فیلتر وینر و کالمن هدایت می نماید.

که فیلتر وینر با استفاده از ایده حوزه فرکانسی سیگنال و فیلتر کالمن با استفاده از ایده های حوزه زمان عمل خواهد نمود.

تخمین بر اساس اندازه گیری های گسسته در زمان

با توجه به اینکه بیشتر اندازه گیری ها به صورت گسسته در زمان صورت می پذیرد و پردازش سیگنال نیز با استفاده از کامپیوترهای دیجیتال انجام می شود لازم است مساله تخمین در حوزه گسسته در زمان نیز بررسی شده و در این حوزه پیگیری شود.

به این منظور

$$z(nT) = g\left(s(nT), v(nT), nT\right) \;\rightarrow\; z(n) = g\left(s(n), v(n), nT\right)$$

که T عبارت است از زمان نمونه برداری.

در این حالت مساله مورد نظر ما به عنوان تخمین عبارت خواهد بود از تولید تخمین $\hat{s}(n)$ از $s(n)$ با استفاده از $z(i)$ در بازه ای از مقادیر صحیح i.

که به عنوان یک تخمینگر علی میتوان فرم کلی زیر را معرفی نمود:

$$\hat{s}(n) = \alpha\left(\left\{z(i) : -\infty < i \le n\right\}, n\right)$$

تخمینگر های خطی گسسته در زمان

مشابه حالت پیوسته در زمان نیز یک تخمینگر علی خطی گسسته در زمان ساختاری به صورت زیر دا:

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=-\infty}^{n} h(n,i)z(i) \qquad (1.15)$$

که $h(n,i)$ عبارت است از خروجی تخمینگر در مرحله n ام وقتی که ورودی ضربه واحد در زمان i به آن اعمال شده است.

The noncausal discrete-time counterpart estimator:

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=-\infty}^{n+q} h(n,i)z(i) \qquad (1.16)$$

$q:$ positive integer

تخمینگر های *LTI* گسسته در زمان

تخمینگر (۱.۱۵) یک تخمینگر **LTI** است اگر و فقط اگر تابع $h(n,i)$ تابعی از n-i باشد و

$$h(n,i)=h(n-i)$$

در این حالت معادلات تخمینگر به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=-\infty}^{n} h(n-i)z(i)=h(n)*z(n) \qquad (1.18)$$

مثالی از یک تخمینگر ساده

فیلتر میانگین:

$$s(n) = s$$
$$z(n) = s + v(n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

با استفاده از فیلتر میانگین:

$$\hat{s}(n) = \frac{1}{n}\left[z(1) + z(2) + \cdots + z(n)\right] = s + \frac{1}{n}\left[v(1) + v(2) + \cdots + v(n)\right]$$

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=1}^{n} h(n,i) z(i) \longrightarrow h(n,i) = \frac{1}{n} \longrightarrow$$

فیلتر میانگین فیلتر خطی است.

فیلتر میانگین متغیر با زمان است.

توصیف حوزه فرکانس تخمینگر گسسته در زمان

$$\xrightarrow{DTFT:\, S(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-j\omega n}} \hat{S}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) Z(e^{j\omega}) \qquad (1.18)$$

تخمین پارمترهای سیگنال:

در بسیاری از کاربردها، یک سیگنال گسسته قابل بیان به صورت زیر است:

$$s(n) = \sum_{j=1}^{q} \theta_j \gamma_j(n) \qquad (1.20)$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$: constant as parameters of signal

$\gamma_1(n), \gamma_2(n), \ldots, \gamma_q(n)$: known function of n

تخمین پارامترهای سیگنال

If $s(n) = s \longrightarrow \theta = s$, $\gamma(n) = 1$

If $\gamma_j(n) = n^{j-1} \longrightarrow s(n) = \sum_{j=1}^{q} \theta_j n^{j-1}$ (1.20)

مساله اصلی در اینجا تخمین پارمترهای $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ بر اساس مقادیر اندازه گیری شده $z(n) = g\left(s(n), v(n), nT\right)$

راه حل: روش کوچکترین مربعات خطا (**Least Square**)

تخمین حالت

یکی از محل های استفاده تخمینگر ها مدل های فضای حالت و تخمین متغیرهای حالت است.

$$\dot{x}_{N\times1}(t) = Ax(t) + B\omega_{m\times1}(t) \qquad (1.21) \qquad \text{State model}$$

$$z_{p\times1}(t) = Cx(t) + v_{p\times1}(t) \qquad (1.22) \qquad \text{Measurement equation}$$

$\omega(t)$: process noise

$v(t)$: measurement noise

مساله اصلی در این کاربرد تولید $\hat{x}(t)$ به عنوان تخمینی از حالت ها است با استفاده از اندازه گیری های انجام شده $z(\tau)$ برای $0 \le \tau \le t$.

Kalman-Bucy filter: $\dfrac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + K(t)\left[z(t) - C\hat{x}(t)\right]$

مثال (Tracking an Object)

مساله تعقیب یک شیء که شامل دنبال کنندگی موقعیت و سرعت آن شیء است میتواند یکی از مثال های عملی در تخمین محسوب گردد.

با فرض اینکه شیء دارای سرعت ثابت باشد حرکت آن در سه محور را میتوان به صورت جداگانه در نظر گرفت. اگر بخواهیم حرکت در محور x را مدل نماییم میتوان آن را بصورت معادله حالت زیر توصیف نمود.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \qquad \text{where: } x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix}$$

در این حالت رادار موقعیت شیء را به صورت یک متغیر دارای نویز اندازه گیری به صورت زیر ارائه می نماید.

$$z(\tau) = x_1(t) + v(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + v(t)$$

Estimator

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{\dot{x}}_1(t) \end{bmatrix}$$

مثال (Tracking an Object)

اغلب تخمینگر ها به صورت گسسته در زمان عمل می نمایند، لذا لازم است معادلات حالت به صورت گسسته در زمان ارائه شود:

$$\Phi = e^{AT}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{N\times1}(t) = Ax(t) + B\omega_{m\times1}(t) \\ z_{p\times1}(t) = Cx(t) + v_{p\times1}(t) \end{cases} \xrightarrow{\Gamma = \int_0^T e^{A\tau} B\,d\tau} \begin{cases} x(n+1) = \Phi x(n) + \Gamma \omega(n) \\ z(n) = Cx(n) + v(n) \end{cases}$$

در نتیجه برای این مثال:

$$\begin{cases} x(n+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(n) \\ z(n) = Cx(n) + v(n) \end{cases}$$

استفاده از مدل حالت در تخمین سیگنال

دسته بزرگی از سیگنال ها معادلات دیفرانسیل از مرتبه N را برآورده می نمایند.
این دسته از سیگنال ها را با استفاده از مدل فضای حالت می توان تخمین زد.

$$s^{(N)}(t)+a_{N-1}s^{(N-1)}(t)+\cdots+a_1 s^{(1)}(t)+a_0 s(t)=0$$

$$\begin{aligned} x_1(t)&=s(t)\\ x_2(t)&=s^{(1)}(t)\\ &\vdots\\ x_n(t)&=s^{(N-1)}(t)\end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)\\ s(t)=Cx(t)\end{cases} \longrightarrow z(t)=Cx(t)+v(t)$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{N-1}\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

استفاده از مدل حالت در تخمین پارامترهای سیگنال

مساله تخمین پارمترها که پیش از این مطرح شد را می توان به مساله تخمین متغیرهای حالت تبدیل نموده و حل کرد.

$$(1.20) \quad \leftrightarrow \quad s(n)=\sum_{j=1}^{q}\theta_j\gamma_j(n)$$

$$\Rightarrow \quad x_i=\theta_i, \quad i=1,2,\ldots,q.$$

با توجه به اینکه ضرایب ثابت هستند:

$$x(n+1)=x(n) \;\rightarrow\; \Phi=I_{q\times q}$$

$$\longrightarrow \quad s(n)=\gamma(n)x(n) \;\rightarrow\; z(n)=\gamma(n)x(n)+v(n)$$

همانگونه که مشخص است در این حالت ضرایب تخمین زده شده تابعی از n هستند که با گذشت زمان به سمت مقادیر واقعی همگرا خواهند شد.

تخمین کمترین مربعات (*Least Square Estimation*)

تخمین کمترین مربعات یکی از روشهای قدرتمند تخمین است که بر پایه روش کمترین مربعات بنا نهاده شده است. این روش یک روش غیر تصادفی تخمین است، به عبارت دیگر در این روش اندازه گیری ها و متغیرهای مد نظر عمل تخمین نویزی نیستند.

در ادامه روش کمترین مربعات برای دو هدف زیر مد نظر قرار می گیرد:

1. تخمین پارامترهای سیگنال.
2. تخمین متغیرهای حالت در مدل فضای حالت.

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

یک سیگنال گسسته با توصیف زیر در نظر بگیرید:

$$(1.20) \quad \leftrightarrow \quad s(n)=\sum_{j=1}^{q}\theta_j\gamma_j(n) \quad \Rightarrow \quad s(n)=\gamma(n)\theta$$

$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_q$: constant and unknown $\qquad \theta=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \\ \theta_q\end{bmatrix}$

$\gamma_1(n),\gamma_2(n),\ldots,\gamma_q(n)$: known function of n

$$\gamma(n)=\begin{bmatrix}\gamma_1(n) & \cdots & \gamma_q(n)\end{bmatrix}$$

Measurments of signal: $z(n)=s(n)+v(n)$

مشابه قبل هدف یافتن $\hat{\theta}(n)$ به عنوان تخمین θ است در زمان nT با استفاده از:

$z(1), \quad z(2), \quad \cdots, \quad z(n)$

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

با استفاده از مقدار تخمین زده شده $\hat{\theta}(n)$ میتوان سیگنال جدیدی با عنوان $\hat{s}(n)$ را ساخت که تخمینی از سیگنال واقعی $s(n)$ می باشد.

$$s(n) = \gamma(n)\theta(n), \qquad (1.34)$$

همچنین مقادیر تخمینی از سیگنال را در بازه $i<n$ با استفاده از $\hat{\theta}(n)$ میتوان در اختیار داشت.

$$\hat{s}(i) = \gamma(i)\hat{\theta}(n), \quad i<n \qquad (1.35)$$

حال میتوان مجموع مربعاتی را به صورت زیر ارائه نمود که اگر تخمین $\hat{\theta}(n)$ با مقدار θ برابر بوده و $v(i)=0,\ i=1,2,\cdots,n$ باشد مجموع مربعات در رابطه (۱.۳۶) صفر خواهد گشت.

$$S.S. = \left[z(1)-\hat{s}(1)\right]^2 + \left[z(2)-\hat{s}(2)\right]^2 + \cdots + \left[z(n)-\hat{s}(n)\right]^2 \qquad (1.36)$$

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

ولیکن در صورتی که $\hat{\theta}(n)$ با θ برابر نباشد مجموع مربعات مقدار مثبتی را نتیجه خواهد داد که اندازه آن بستگی دارد به فاصله مقدار تخین زده شده از مقدار واقعی.

لذا مجموع مربعات را میتوان به صورت یک تابع خطا در نظر گرفت که هدف حداقل نمودن مقدار آن است با استفاده از تخمین درست $\hat{\theta}(n)$.

تخمین $\hat{\theta}(n)$ که تابع مربعات خطای (۱.۳۶) را مینیمم مینماید را تخمین حداقل مربعات خطا (LS) از θ در زمان nT می نامند.

*** به منظورمحاسبه تخمین کمترین مربعات خطا (**Least Square**) از پارامترهای سیگنال $s(n)$ ابتدا لازم است رابطه (۱.۳۶) به صورت برداری بازنویسی گردد. به این منظور:

$$Z_n = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix}_{n\times 1}, \qquad \Gamma_n = \begin{bmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n) \end{bmatrix}_{n\times q}$$

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

در نتیجه رابطه (۱.۳۶) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$S.S. = \left[Z_n - \Gamma_n\hat{\theta}(n)\right]^T \left[Z_n - \Gamma_n\hat{\theta}(n)\right]$$

به منظور محاسبه تخمین $\hat{\theta}(n)$ با استفاده از حداقل سازی تابع $S.S.$ میتوان از ایده مشتق گیری جزئی نسبت به $\hat{\theta}(n)$ استفاده نمود. در این صورت:

$$\frac{\partial(S.S.)}{\partial\hat{\theta}(n)} = -2\Gamma_n^T\left[Z_n - \Gamma_n\hat{\theta}(n)\right] = 0 \longrightarrow \Gamma_n^T\Gamma_n\hat{\theta}(n) = \Gamma_n^T Z_n \qquad (1.38)$$

شرط کافی برای محاسبه $\hat{\theta}(n)$ از این رابطه و یا به عبارت دیگر معکوس پذیر بودن $\Gamma_n^T\Gamma_n$ این است که رتبه ماتریس Γ_n برابر q باشد.

$$\hat{\theta}(n) = \left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1}\Gamma_n^T Z_n \qquad (1.39)$$

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

چند نکته مهم:

- شرط اینکه رتبه ماتریس Γ_n برابر q باشد این است که $n \geq q$ باشد. به عبارت دیگر تعداد دسته اطلاعات اندازه گیری شده از تعداد ضرایب مجهول بیشتر باشد.

- تخمین حداقل مربعات (**LS**) تخمینی از θ در زمان nT ارائه می نماید که به آن روش ***batch*** گفته می شود، چرا که برای محاسبه آن به تمامی اطلاعات و اندازه گیری های $z(1),\ z(2),\ \cdots,\ z(n)$ نیاز است. پر واضح است که این روش به صورت **off-line** قابل استفاده می باشد.

- شرط کامل بودن رتبه ماتریس Γ_n در اصل یک محدودیتی است بر روی تابع های $\gamma_j(n)$ به عنوان تابع های زمانی توصیف کننده سیگنال.

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش کمترین مربعات

فرم بازگشتی روش کمترین مربعات (Recursive Least Square)

با توجه به دم علت مهم: (۱) سنگینی محاسبات در زمانی که مقدار n بزرگ می شود و (۲) نیاز به محاسبه online پارامترها، روش کمترین مربعات بازگشتی (RLS) ارائه گشته است.

با استفاده از معادلات زیر که درستی آنها به سادگی قابل بررسی است.

$$\Gamma_{n+1}^T Z_{n+1} = \Gamma_n^T Z_n + \gamma^T(n+1) z(n+1) \qquad (1.40)$$

$$\Gamma_{n+1}^T \Gamma_{n+1} = \Gamma_n^T \Gamma_n + \gamma^T(n+1) \gamma(n+1) \qquad (1.41)$$

با استفاده از قضیه معکوس سازی ماتریس:

$$\left[\Gamma_{n+1}^T \Gamma_{n+1}\right]^{-1} = \left[\Gamma_n^T \Gamma_n\right]^{-1} - \frac{\left[\Gamma_n^T \Gamma_n\right]^{-1} \gamma^T(n+1)\gamma(n+1)\left[\Gamma_n^T \Gamma_n\right]^{-1}}{1+\gamma(n+1)\left[\Gamma_n^T \Gamma_n\right]^{-1}\gamma^T(n+1)} \qquad (1.42)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش RLS

با جایگزاری $n+1$ به جای n در (۱.۳۹) خواهیم داشت:

$$\hat{\theta}(n+1) = \left[\Gamma_{n+1}^T \Gamma_{n+1}\right]^{-1} \Gamma_{n+1}^T Z_{n+1} \qquad (1.43)$$

با جایگزاری (۱.۴۲) و (۱.۴۰) در (۱.۴۳) خواهیم داشت:

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + K(n)\left[z(n+1) - \gamma(n+1)\hat{\theta}(n)\right] \qquad (1.44)$$

$$K(n)_{q\times 1} = \frac{\left[\Gamma_n^T \Gamma_n\right]^{-1}\gamma^T(n+1)}{1+\gamma(n+1)\left[\Gamma_n^T \Gamma_n\right]^{-1}\gamma^T(n+1)} \qquad (1.45)$$

Estimation Theory
by: Dr B. Moaveni

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش RLS

با توجه به رابطه (۱.۴۵) و (۱.۴۲) میتوان محاسبات $K(n)$ و $\left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1}$ را به صورت بازگشتی انجام داد.

$$\left[\Gamma_{n+1}^T\Gamma_{n+1}\right]^{-1} = \left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1} - \frac{\left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1}\gamma^T(n+1)\gamma(n+1)\left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1}}{1+\gamma(n+1)\left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1}\gamma^T(n+1)}$$

$$= \left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1} - K(n)\gamma(n+1)\left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1} = \left(I - K(n)\gamma(n+1)\right)\left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1}$$

$$P_n = \left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} K(n) &= \frac{P_n\gamma^T(n+1)}{1+\gamma(n+1)P_n\gamma^T(n+1)} \\ \hat{\theta}(n+1) &= \hat{\theta}(n) + K(n)\left[z(n+1) - \gamma(n+1)\hat{\theta}(n)\right] \\ P_{n+1} &= \left(I - K(n)\gamma(n+1)\right)P_n \end{aligned}}$$

تخمین پارامترهای سیگنال با استفاده از روش RLS

روش مربعات بازگشتی (**RLS**) بسیار موثرتر از روش مربعات (**LS**) در پروسه تخمین به کار گرفته می شود.

نکاتی مهم در خصوص استفاده از روش RLS :

- روش **RLS** به مقدار اولیه تخمین $\hat{\theta}$ نیاز دارد. اگر هیچ اطلاعی از مقدار اولیه وجود نداشته باشد می توان مقدار آن را برابر صفر در نظر گرفت.
- اولین تخمین های مناسب میتوانند در مرحله r بدست آیند. مقدار r کوچکترین مقدار صحیحی است که به ازای آن ماتریس $\Gamma_r^T\Gamma_r$ معکوس پذیر می باشد.
- مقدار ماتریس P_0 نیز لازم است در شروع الگوریتم مقدار دهی شود که پیشنهاد مناسب برای آن عبارت است از $P_0 = \alpha I, \quad \alpha > 0$.

مثال

$$s(n)=s \longrightarrow \begin{cases}\gamma(n)=1\\ \theta=s\end{cases}$$

$$z(n)=s+v(n)$$

$$\Rightarrow\ \Gamma_n=\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow\ \Gamma_n^T\Gamma_n=n \quad \xrightarrow{\text{LS}} \quad \hat{\theta}(n)=\left[\Gamma_n^T\Gamma_n\right]^{-1}\Gamma_n^T Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z(i)$$

نتیجه مشابه نتیجه تخمین فیلتر میانگذر است.

$$\xrightarrow{\text{RLS}} \begin{cases} K(n)=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{n+1}\\ \hat{\theta}(n+1)=\hat{\theta}(n)+\dfrac{1}{n+1}\left(z(n+1)-\hat{\theta}(n)\right)\end{cases}$$

روش کمترین مربعات وزن داده شده (WLS)

$$S.S.=\left[Z_n-\Gamma_n\hat{\theta}(n)\right]^T W_n\left[Z_n-\Gamma_n\hat{\theta}(n)\right]$$

where, W_n : Symmetric positive definite

اگر ماتریس W_n قطری باشد:

$$W_n=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & w_n\end{bmatrix}$$

$$S.S.=\sum_{i=1}^{n} w_i\left[z(i)-\hat{s}(i)\right]^2$$

همانگونه که مشخص است از w_i ها میتوان به عنوان ضریب فراموشی اطلاعات استفاده نمود. بطوریکه:

$$\begin{cases} w_n=1\\ w_i\rightarrow 0 \ \text{ as } \ i\rightarrow 1\end{cases}$$

روش کمترین مربعات وزن داده شده (WLS)

Weighted Least Square:

$$\hat{\theta}(n) = \left[\Gamma_n^T W_n \Gamma_n\right]^{-1} \Gamma_n^T W_n Z_n$$

Weighted Recursive Least Square :

$$\text{If} \quad W_n = \begin{bmatrix} \alpha^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha^{n-2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$0<\alpha<1$: forgetting factor

$$K(n)_{q\times 1} = \frac{\left[\Gamma_n^T W_n \Gamma_n\right]^{-1} \gamma^T(n+1)}{\alpha + \gamma(n+1)\left[\Gamma_n^T W_n \Gamma_n\right]^{-1} \gamma^T(n+1)}$$

$$\left[\Gamma_{n+1}^T \Gamma_{n+1}\right]^{-1} = \left(I - K(n)\gamma(n+1)\right)\left[\Gamma_n^T W_n \Gamma_n\right]^{-1}$$

روش کمترین مربعات وزن داده شده (WLS)

Recursive Least Square with *Forgetting Factor*:

$$\boxed{\begin{aligned} K(n) &= \frac{P_n \gamma^T(n+1)}{\alpha + \gamma(n+1) P_n \gamma^T(n+1)} \\ \hat{\theta}(n+1) &= \hat{\theta}(n) + K(n)\left[z(n+1) - \gamma(n+1)\hat{\theta}(n)\right] \\ P_{n+1} &= \left(I - K(n)\gamma(n+1)\right) P_n \Big/ \alpha \end{aligned}}$$

$0<\alpha<1$: forgetting factor

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS

$$x(n+1) = \Phi_{N\times N}x(n) \qquad (1.54)$$
$$z(n) = C_{1\times N}x(n) + v(n) \qquad (1.55)$$

مشابه قبل هدف تخمین حالت ها است با استفاده از اندازه گیری های

$$z(1), \quad z(2), \quad \cdots, \quad z(n)$$

با فرض اینکه ماتریس Φ معکوس پذیر است معادله (۱.۵۴) را می توان در جهت عکس به صورت زیر حل نمود:

$$x(i) = \Phi^{-n+i}x(n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (1.56)$$

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS

با استفاده از روابط (۱.۵۴) تا (۱.۵۶):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix}}_{Z_n} = \begin{bmatrix} Cx(1) \\ Cx(2) \\ \vdots \\ Cx(n) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix}}_{V_n} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\Phi^{-n+1} \\ C\Phi^{-n+2} \\ \vdots \\ C \end{bmatrix}}_{U_n} x(n) + \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix} \qquad (1.57)$$

$$\longrightarrow \qquad Z_n = U_n x(n) + V_n \qquad (1.58)$$

در نتیجه تابع مجموع مربعات را می توان به صورت زیر نوشت:

$$S.S. = [Z_n - U_n x(n)]^T [Z_n - U_n x(n)] \qquad (1.59)$$

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS

با گرفتن مشتق جزئی از معادله (۱.۵۹) نسبت به $x(n)$ و مساوی صفر قرار دادن، تخمین متغیرهای حالت به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\hat{x}(n) = \left[U_n^T U_n\right]^{-1} U_n^T Z_n \qquad (1.61)$$

با بازنویسی ماتریس U_n به صورت تابعی از ماتریس رؤیت پذیر O_n خواهیم داشت:

$$O_n = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix} : \text{ observability matrix } \Rightarrow U_n = O_n \Phi^{1-n}$$

$$\longrightarrow \quad \hat{x}(n) = \Phi^{n-1}\left[O_n^T O_n\right]^{-1} O_n^T Z_n \qquad (1.67)$$

تخمین حالت ها با استفاده از روش LS

توجه به معادله (۱.۶۷) نشان می دهد که در این معادله Φ^{-1} ظاهر نشده است و لذا نیازی به فرض محدود کننده معکوس پذیری Φ نیست.

$$\hat{x}(n) = \Phi^{n-1}\left[O_n^T O_n\right]^{-1} O_n^T Z_n \qquad (1.67)$$

نکته قابل توجه در خصوص معادله (۱.۶۷) این است که ماتریس O_n معکوس پذیر است اگر و فقط اگر ماتریس $O_n^T O_n$ معکوس پذیر باشد و یا به عبارت دیگر مدل فضای حالت (۱.۵۴) و (۱.۵۵) رؤیت پذیر باشد.

تخمین حالت ها با استفاده از روش RLS

$$\hat{x}(n+1) = \Phi\hat{x}(n) + K(n)\left[z(n+1) - C\Phi\hat{x}(n)\right]$$

$$K(n) = \frac{P_n C^T}{1 + CP_n C^T}$$

$$P_{n+1} = \Phi\left[I - K(n)C\right]P_n\Phi^T$$

$$P_n = \Phi^n\left[O_n^T O_n\right]\left(\Phi^T\right)^n$$

خطای تخمین

خطای تخمین به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\tilde{x}(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

از طرفی:

$$Z_n = U_n x(n) + V_n = O_n\Phi^{1-n}x(n) + V_n$$

در نتیجه:

$$\hat{x}(n) = \Phi^{n-1}\left[O_n^T O_n\right]^{-1} O_n^T\left[O_n\Phi^{1-n}x(n) + V_n\right]$$

$$\Rightarrow \hat{x}(n) = x(n) + \Phi^{n-1}\left[O_n^T O_n\right]^{-1} O_n^T V_n$$

$$\Longrightarrow \tilde{x}(n) = x(n) - \hat{x}(n) = -\Phi^{n-1}\left[O_n^T O_n\right]^{-1} O_n^T V_n$$

این رابطه نشان می دهد که دامنه خطای تخمین ارتباط مستقیم دارد با دامنه نویز $v(n)$.

باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 2

سیگنال های تصادفی
و سیستم های با ورودی تصادفی

مقدمه

- در مساله تخمین سیگنال $s(n)$ از مقدار اندازه گیری $z(n)=g\left(s(n),v(n),nT\right)$ ترم نویزی $v(n)$ معمولا به صورت تصادفی تغییر می کند، لذا مدل سازی نویز $v(n)$ نیازمند فرموله نمودن سیگنال های تصادفی است. همچنین امکان دارد سیگنال $s(n)$ شامل متغیرهای تصادفی باشد که این نیاز به توصیف و مدل سازی سیگنال تصادفی را بیش از پیش نشان می دهد.

- یک متغیر تصادفی بر اساس نتایج ممکن یک آزمایش از مجموعه نتایج S تعریف می شود.
- یک رویداد A زیر مجموعه رخدادهای S می باشد.

$S:$ Probability Space

متغیرهای تصادفی

- یک متغیر تصادفی x عبارت است از تابعی از مجموعه S به مجموعه اعداد حقیقی.

$$\alpha \in S \quad \to \quad \boldsymbol{x}(\alpha) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \neq 0 \\ \boldsymbol{x}(\alpha) = 0 \end{cases}$$

- البته ممکن است ساختار نوشتاری زیر نیز استفاده گردد:

$$\alpha_i \;\leftrightarrow\; i^{th} \text{ trial} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}(i) = \boldsymbol{x}(\alpha_i) \qquad \text{where, } i = 1, 2, \ldots$$

$$\left.\begin{matrix} \text{sample realizations} \\ \text{sample values} \end{matrix}\right\} \text{of random variable } \boldsymbol{x}$$

متغیرهای تصادفی

- احتمال رخ دادن واقعه A از مجموعه رخ دادهای S را با $P(A)$ نمایش می دهند.

$$P(A) \in \mathbb{R}^+$$

- برای $A \subset S$ معادلات و نامعادلات زیر صادق هستند:

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad (2.1)$$

$$P(S) = 1 \qquad (2.2)$$

-

$$\left.\begin{matrix} A \subset S \\ B \subset S \\ A \cap B = \varnothing \end{matrix}\right\} P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (2.3)$$

متغیرهای تصادفی

- $$\left.\begin{array}{l} A\subset S \\ B\subset S \\ A\cap B\neq\varnothing \end{array}\right\} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

- $$(2.3)\quad \Rightarrow \begin{cases} P(\varnothing)=0 \\ P(\bar{A})=1-P(A) \end{cases}$$

- یک متغیر تصادفی x در فضای احتمالی S (*Probability Space*) با استفاده از تابع توزیع احتمال آن مشخص می گردد.

$$F_x(x)=P\{\alpha\in S: x(\alpha)\leq x\}$$

$F_x(x)$ عبارت است از احتمال اینکه مقدار متغیر تصادفی x کوچکتر یا مساوی مقدار حقیقی x باشد.

متغیرهای تصادفی

- با توجه به تعریف تابع توزیع احتمال معادلات زیر در مورد آنها قابل توجه می باشند.

$$\left.\begin{array}{l} F_x(-\infty)=0 \\ F_x(\infty)=1 \end{array}\right\} \qquad (2.4)$$

$$0\leq F_x(x)\leq 1 \ \text{ for all } x \qquad (2.5)$$

$$\text{If } x_1<x_2 \ \Rightarrow F_x(x_1)<F_x(x_2) \qquad (2.6)$$

- رابطه (۲.۶) نشان می دهد که تابع توزیع احتمال یک تابع غیر کاهشی (non-decreasing) است.

متغیرهای تصادفی

- هر متغیر تصادفی x با استفاده از تابع چگالی احتمال متناظر نیز قابل توصیف است. که این تابع عبارت است از مشتق تابع توزیع احتمال آن متغیر تصادفی.

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) \qquad (2.7)$$

$$(2.7) \quad \Rightarrow \quad F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)dx \qquad (2.8)$$

- با توجه به روابط (۲.۷) و (۲.۸) معادلات زیر قابل استنتاج خواهند بود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$$

متغیرهای تصادفی

- با توجه به روابط (۲.۷) و (۲.۸) معادلات زیر قابل استنتاج خواهند بود:

$$\text{If } \; x_1 < x_2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \; P(x_1 < x \le x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x)dx$$

Most likely value of RV $\boldsymbol{x}$:

$$x \,|\; \max\left[\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_x(x)dx\right] \;\rightarrow\; \frac{df_x(x)}{dx} = 0$$

متغیرهای تصادفی

- مثال:

$$S = \{\text{working normally, not working normally}\}$$

$$P(\text{working normally}) = 0.9, \quad P(\text{not working normally}) = 0.1$$

پس می توان متغیر تصادفی x را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\mathbf{x}(\text{working normally}) = 0, \qquad \mathbf{x}(\text{not working normally}) = 1$$

$\Rightarrow$ The Probability Distribution Matrix:

$$F_x(x) = P\{\alpha \in S : \mathbf{x}(\alpha) \le x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.9, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f_x(x) = 0.9\delta(x) + 0.1\delta(x-1)$$

متغیرهای تصادفی

- مثال: متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت

$$S = [-1,1]$$

$$\mathbf{x}(\alpha) = \alpha$$

تابع توزیع احتمال (پیوسته)

$$F_x(x) = P\{\alpha \in S : \mathbf{x}(\alpha) \le x\} = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \dfrac{x+1}{1-(-1)} = 0.5(x+1), & -1 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f_x(x) = \begin{cases} 0.5, & -1 < x < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

متغیرهای تصادفی

- مثال: متغیر تصادفی گوسی یا نرمال
- با فرض توزیع گوسی:

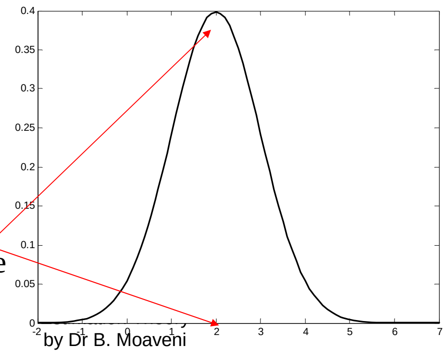
$S = [-1,1]$

$\mathbf{x}(\alpha) = \alpha$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

η : real number

σ: positive number



$x = \eta = 2$: most likely value

توزیع شرطی و چگالی شرطی

$\mathbf{x}$: RV

S : probability Space

$A \subset S$: A is an event

- تابع توزیع شرطی:

$$F_x(x \mid A) = P\left(\{\alpha \in S : \mathbf{x}(\alpha) \le x\} \mid A\right) = \frac{P\left(\{\alpha \in S : \mathbf{x}(\alpha) \le x\} \cap A\right)}{P(A)}$$

- تابع چگالی شرطی:

$$f_x(x \mid A) = \frac{dF_x(x \mid A)}{dx}$$

توزیع شرطی و چگالی شرطی

- مثال:

$$F_x(x) = P\{\alpha \in S : \boldsymbol{x}(\alpha) \le x\} = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.5(x+1), & -1 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \end{cases}$$

$$A = \{x \in S : 0 \le x \le 1\} \Rightarrow P(A) = 0.5$$

$$P\left(\{\alpha \in S : \boldsymbol{x}(\alpha) \le x\} \cap A\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.5x, & 0 \le x \le 1 \\ 0.5, & 1 < x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F_x(x \mid A) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$$

تابع از متغیر تصادفی

Ψ : real valued function

$$y = \Psi(\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow \quad y(\alpha) = \Psi\left(\boldsymbol{x}(\alpha)\right)$$

- مثال:

$$y(\alpha) = \Psi\left(x(\alpha)\right) = \alpha x(\alpha)$$

$$F_y(y) = P\{\alpha \in S : \boldsymbol{y}(\alpha) \le y\} \quad \Rightarrow \quad F_y(y) = P\{\alpha \in S : \alpha \boldsymbol{x}(\alpha) \le y\}$$

$$\Rightarrow \quad F_y(y) = P\left\{\alpha \in S : \boldsymbol{x}(\alpha) \le {}^{y}\!/_{\alpha}\right\} = F_x\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

گشتاور یک متغیر تصادفی

$\boldsymbol{x}$: RV

$f_x(x)$: probability density function

$$i^{th}\ \text{moment of } x:\quad E\left[x^i\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x^i f_x(x)dx$$

- امید ریاضی: گشتاور اول یک متغیر تصادفی را مقدار میانگین یا امید ریاضی آن متغیر یا مرکز ثقل تابع چگالی احتمال گویند.

$$\boxed{E\left[x\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x\ f_x(x)dx}$$

$$\boldsymbol{x}: x_1, x_2, \ldots, x_N \quad \rightarrow \quad E\left[x\right]\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

گشتاور یک متغیر تصادفی

- مثال:

$\boldsymbol{x}$: Uniformly Distributed RV

$$x_1 \le x \le x_2 \rightarrow f_x(x)=\frac{1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow\ E\left[x\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x\ f_x(x)dx=\int_{x_1}^{x_2} x\ \frac{1}{x_2-x_1}dx=\frac{x_2+x_1}{2}$$

- مثال: مقدار میانگین یک متغیر تصادفی گوسی

$$\boldsymbol{x}\sim N(\eta,\sigma^2):\qquad f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}}$$

گشتاور یک متغیر تصادفی

- ادامه مثال: مقدار میانگین یک متغیر تصادفی گوسی

$\rightarrow \quad E(x) = \eta :$ most likely value

- گشتاور مرتبه دوم:

$$E\left[x^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)dx \ >0 \qquad : \text{ mean of the square/ mean square}$$

$$\boldsymbol{x} : x_1, x_2, \ldots, x_N \quad \rightarrow \quad E\left[x^2\right] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

واریانس و انحراف معیار یک متغیر تصادفی

- واریانس یک متغیر تصادفی:

امید ریاضی مجذور فاصله تا مقدار میانگین

$$\boxed{\begin{array}{l} Var[x] = E\left[\left(x-\eta\right)^2\right] \\ \qquad \eta : \text{ mean of } \boldsymbol{x} \end{array}}$$

$$Var[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-\eta\right)^2 f_x(x)dx = E[x^2] - \left(E[x]\right)^2$$

- انحراف معیار یک متغیر تصادفی:

جذر واریانس یک متغیر تصادفی

$$\boxed{\sigma = \sqrt{Var[x]}}$$

$$\boldsymbol{x} : x_1, x_2, \ldots, x_N \quad \rightarrow \quad E\left[x^2\right] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

واریانس و انحراف معیار یک متغیر تصادفی

- مثال:

$\boldsymbol{x}$: Uniformly Distributed RV

$$x_1 \le x \le x_2 \to f_x(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \quad E\left[x^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \frac{x_1^2 + x_2 x_1 + x_2^2}{3}$$

$$\to Var[x] = E[x^2] - \left(E[x]\right)^2 = \frac{x_1^2 + x_2 x_1 + x_2^2}{3} - \frac{x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2}{4} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{12}$$

- توجه: معلوم بودن مقدار میانگین و واریانس برای توصیف توزیع یکنواخت و توزیع گوسی کافی است ولیکن در حالت کلی این دو مشخصه کفایت نمی کند.

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$: Jointly Distributed RVs

Joint Distrbuted Function: $F_{x,y}(x,y) = P\left(\left\{\boldsymbol{x} \le x, \boldsymbol{y} \le y\right\}\right)$

Joint Density Function: $f_{x,y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{x,y}(x,y)}{\partial x \partial y}$

$$\Rightarrow \; P\left(\left\{\boldsymbol{x} \le x, \boldsymbol{y} \le y\right\}\right) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{x,y}(x,y)\; dx\; dy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\; dy \\ f_y(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\; dx \end{cases}$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- امید ریاضی دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

$$E[xy]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \;\; f_{x,y}(x,y)\; dx\; dy$$

$\boldsymbol{x, y}$: Uncorrelated RVs $\leftrightarrow$ $E[xy]=E[x]E[y]$

- کوواریانس x و y

$$\boxed{Cov[x,y]=E\left[\left(x-E[x]\right)\left(y-E[y]\right)\right]\pi}$$

$\boldsymbol{x, y}$: Uncorrelated RVs $\leftrightarrow$ Cov[x,y]=0

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- دو متغیر تصادفی مستقل

دو متغیر تصادفی مستقل خوانده می شوند اگر:

$$F_{x,y}(x,y)=F_x(x)F_y(y) \quad \Rightarrow \quad f_{x,y}(x,y)=f_x(x)\,f_y(y)$$

توجه: **اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند غیر همبسته (*uncorrelated*) نیز هستند.**

- تابعی از دو متغیر تصادفی:

$$z=\Psi(x,y) \longrightarrow E[z]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x,y)\;\; f_{x,y}(x,y)\; dx\; dy$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- مثال:

$z = x + y \qquad \Rightarrow \quad E[z] = E[x] + E[y]$

→ If x, y are uncorrelated $\Rightarrow \quad Var[z] = Var[x] + Var[y]$

→ If x, y are independent

$$\Rightarrow \quad f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y)\, f_y(y) dy = f_x(z) * f_y(z)$$

نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} x : N(\eta_x, \sigma_x^2) \\ y : N(\eta_y, \sigma_y^2) \\ x, y \text{ are independent} \end{array}\right\} \Rightarrow z = x + y \text{ is Gaussian} : N(\eta_x + \eta_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- توابع توزیع شرطی:

x, y: Jointly Distributed RVs

where, $\left\{\begin{array}{l} x_1 \le x_2 \\ y \end{array}\right.$ are real numbers

Conditional Distrbuted Function:

$$F_y(y \mid x_1 < x \le x_2) = P\left(\{\mathbf{y} \le y\} \mid x_1 < \mathbf{x} \le x_2\right) = \frac{P\{\mathbf{y} \le y, x_1 < \mathbf{x} \le x_2\}}{P\{x_1 < \mathbf{x} \le x_2\}}$$

where, $$P\{\mathbf{y} \le y, x_1 < \mathbf{x} \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{-\infty}^{y} f_{x,y}(x, y)\, dx\, dy$$

$$P\{x_1 < \mathbf{x} \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\, dx$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- توابع چگالی شرطی:

$$\boxed{f_y(y \mid x_1 < x \le x_2) = \frac{\partial F_y(y \mid x_1 < x \le x_2)}{\partial y} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f_{x,y}(x,y)\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} f_x(x)\,dx}}$$

$$\text{If } \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x + \Delta x \end{cases} \Rightarrow f_y(y \mid x < \mathbf{x} \le x + \Delta x) = \frac{\int_{x}^{x+\Delta x} f_{x,y}(x,y)\,dx}{\int_{x}^{x+\Delta x} f_x(x)\,dx} \approx \frac{f_{x,y}(x,y)\,\Delta x}{f_x(x)\,\Delta x}$$

$$\xrightarrow{\Delta x \to 0} f_y(y \mid \mathbf{x} = x) = \lim_{\Delta x \to 0} f_y(y \mid x < \mathbf{x} \le x + \Delta x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)}$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

- رابطه **Bayes**:

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow f_y(y \mid \mathbf{x} = x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)} \\ &\text{similarly: } f_x(x \mid \mathbf{y} = y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{f_y(y \mid \mathbf{x} = x) = \frac{f_x(x \mid \mathbf{y} = y)\, f_y(y)}{f_x(x)}}$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

مثال:

$$\left.\begin{array}{l} z = x + y \\ x, y \text{ are independent} \\ y \sim N(0, \sigma_y^2) \end{array}\right\} \to f_z(z \mid \mathbf{x} = x) = ?$$

$$P\{\mathbf{z} \le z, \mathbf{x} = x\} = P\{\mathbf{x} + \mathbf{y} \le z, \mathbf{x} = x\} = P\{\mathbf{y} \le z - x, \mathbf{x} = x\}$$

$$\overset{independence}{=} P\{\mathbf{y} \le z - x\} P\{\mathbf{x} = x\}$$

$$\Rightarrow f_{\mathbf{z}}(z \mid \mathbf{x} = x) = f_y(z - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_y^2}} \qquad (2.45)$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

مثال: (استفاده از رابطه **Byaes**)

$$\left.\begin{array}{l} z = x + y \\ x, y \text{ are independent} \\ x \sim N(\eta_x, \sigma_x^2) \\ y \sim N(\eta_y, \sigma_y^2) \end{array}\right\} \to f_{\mathbf{x}}(x \mid \mathbf{z} = z) = ?$$

$$z = x + y \text{ is Gaussian}: N(\eta_x + \eta_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2) \;\; \to \;\; f_{\mathbf{z}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_x^2 + \sigma_x^2\right)}} e^{-\frac{(z-\eta_x)^2}{2\left(\sigma_x^2 + \sigma_x^2\right)}}$$

$$(2.45) \;\; \to \;\; f_{\mathbf{z}}(z \mid \mathbf{x} = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad f_{\mathbf{z}}(x \mid \mathbf{z} = z) = \frac{f_{\mathbf{z}}(z \mid \mathbf{x} = x) f_{\mathbf{x}}(x)}{f_{\mathbf{z}}(z)} = \frac{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_y^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_y \sigma_x} e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(z-\eta_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(z-\eta_x)^2}{2\left(\sigma_X^2 + \sigma_y^2\right)}}$$

دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک

امید ریاضی شرطی:

$$E[\mathbf{y} \mid \mathbf{x}=x]=\int_{-\infty}^{\infty} y f_y(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}=x)\, dy=\Psi(x)$$

$$E[\Psi(x)]=E\left[E[\mathbf{y} \mid \mathbf{x}]\right]=\int_{-\infty}^{-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_y(\mathbf{y} \mid \mathbf{x}=x)\, f_x(x)\, dydx$$

$$=\int_{-\infty}^{-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{x,y}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dydx=\int_{-\infty}^{-\infty} y f_y(\mathbf{y})\, dy=E[y]$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{E\left[E[\mathbf{y} \mid \mathbf{x}]\right]=E[y]}$$

متغیر های تصادفی برداری

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N$: N jointly dsitributed RVs on S

$$\text{vectro RV } \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha \in S} \boldsymbol{x}(\alpha)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(\alpha) \\ \boldsymbol{x}_2(\alpha) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_N(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{E[\boldsymbol{x}]=\begin{bmatrix} E[\boldsymbol{x}_1] \\ E[\boldsymbol{x}_2] \\ \vdots \\ E[\boldsymbol{x}_N] \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{Cov(\boldsymbol{x})_{N\times N}=E\left[\left(\boldsymbol{x}-E[\boldsymbol{x}]\right)\left(\boldsymbol{x}-E[\boldsymbol{x}]\right)^T\right] \quad : \text{Symmetric and P.D.}}$$

متغیر های تصادفی برداری

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N$: N jointly dsitributed RVs on S

$$F_{\boldsymbol{x}}(x) = P\{\boldsymbol{x}_1 \le x_1, \boldsymbol{x}_2 \le x_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N \le x_N\}$$
$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \frac{\partial^N}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_N} F_{\boldsymbol{x}}(x)$$

سیگنال های گسسته در زمان تصادفی

یک سیگنال گسسته در زمان تصادفی را می توان به صورت یک رشته عددی نمایش داد:

$$\ldots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), \ldots \quad \rightarrow x(n): n \in [-\infty, \infty]$$

که $x(n)$ ها متغیرهای تصادفی با توزیع مشترک هستند و با نمایش فوق یک سیگنال تصادفی دو طرفه شناخته می شوند.

مثالی از سیگنال تصادفی یک طرفه را به صورت زیر می توان ارائه نمود:

$$x(0), x(1), x(2), \ldots \qquad \rightarrow \quad x(i): i \ge 0$$

سیگنال های گسسته در زمان تصادفی

یک سیگنال گسسته در زمان تصادفی را می توان با استفاده از مشخصات تابع خود همبستگی (*Autocorrelation function*) آن معرفی نمود.

$$R_x(i,j)=E\left[x(i),x(j)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(i)x(j)\,f_{x(i)x(j)}\left(x(i),x(j)\right)\,dx(i)\,dx(j)$$

$i,j:$ integer value

توجه: خود همبستگی یک سیگنال، معیاری از میزان همبستگی ما بین نمونه های آن سیگنال است.

سیگنال های گسسته در زمان تصادفی

مثال:

$$x(n+1)=ax(n)$$
$$a\neq 0$$
$$a\in\Re \qquad R_x(i,j)=?$$

$$\left.\begin{array}{l}x(i)=a^i x(0)\\ x(j)=a^j x(0)\end{array}\right\}\Rightarrow R_x(i,j)=E\left[x(i)x(j)\right]=a^{i+j}E\left[x(0)^2\right]$$

$$\text{If}\ \left.\begin{array}{l}a<0\\ i+j:odd\end{array}\right\}\Rightarrow\ R_x(i,j)<0$$

سیگنال های گسسته در زمان تصادفی

مثال:

$x(n):$ random signal
$x(i), x(j):$ are independent for all i, j
$E[x(i)] = 0, \quad \forall i$

$$R_x(i,j) = E[x(i)x(j)] = \begin{cases} E[x(i)^2] & i = j \\ E[x(i)]E[x(j)] & i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad R_x(i,j) = 0, \quad i \neq j$

$\Rightarrow$ there is no correlation between the samples of signal

$\Rightarrow$ Random Signal is *Purely Random*

If $E[x(i)] = c_i \neq 0, \quad \forall i \quad \Rightarrow$ There is correlation between the samples.

سیگنال های Wide-Sense Stationary:

یک سیگنال تصادفی گسسته در زمان را WSS گویند اگر:

$$\begin{cases} (1) - \quad E[x(n)] = c \ \ \text{(a constant value)} \quad \forall n \in [-\infty, \infty] \\ (2) - \quad E[x(i)x(j)] = E[x(i+k)x(j+k)], \quad \forall i, j, k: \ \text{integer} \end{cases}$$

$$(2) \quad \Rightarrow j = i: \ \ E[x(n)^2] = cte \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}[x(n)] = cte$$

در نتیجه شرط اینکه یک سیگنال تصادفی WSS باشد این است که میانگین و واریانس $x(n)$ به ازای هر n ثابت باشد.

سیگنال های Wide-Sense Stationary:

نتیجه: یک سیگنال متشکل از متغیرهای تصادفی با توزیع گوسی یا توزیع یکنواخت WSS است اگر و فقط اگر میانگین و واریانس آن ثابت باشد.

این شرط در حالت کلی و برای سایر توزیع ها درست نیست.

خواص سیگنال های WSS:

$$\begin{cases} R_x(i,j) = E\left[x(i)x(j)\right] = E\left[x(0)x(j-i)\right] = R_x(0, j-i) \\ \rightarrow \ \text{If} \ k = j-i \ \Rightarrow \ R_x(k) = R_x(0,k) \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ R_x(k) = R_x(-k) \end{cases}$$

سیگنال های Wide-Sense Stationary:

مثال: (نویز سفید)

اگر سیگنالی متشکل از متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر باشد یک سیگنال WSS است اگر و فقط اگر

$$E\left[x(n)^2\right] = Var\left[x(n)\right] = \sigma^2 = cte$$

$$\Rightarrow R_x(k) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$where, \ \delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

توجه: سیگنالی با مشخصات فوق را نویز سفید می دانیم.

سیگنال های Wide-Sense Stationary:

مثال: سیگنال WSS

$$x(n) = \omega(n) + \omega(n-1)$$

$$where, \quad \omega(n): \text{ white noise}$$

$$E\left[\omega(n)\right] = 0$$

$$E\left[\omega(n)^2\right] = \sigma^2$$

$$\Rightarrow \quad E\left[x(n)\right] = E\left[\omega(n)\right] + E\left[\omega(n-1)\right] = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \; E\left[x(i)x(j)\right] = E\left[\left(\omega(i)+\omega(i-1)\right)\left(\omega(j)+\omega(j-1)\right)\right]$$

$$= E\left[\omega(i)\omega(j) + \omega(i)\omega(j-1) + \omega(i-1)\omega(j) + \omega(i-1)\omega(j-1)\right]$$

$$= E\left[\omega(i)\omega(j)\right] + E\left[\omega(i)\omega(j-1)\right] + E\left[\omega(i-1)\omega(j)\right] + E\left[\omega(i-1)\omega(j-1)\right]$$

$$\Rightarrow x \text{ is WSS}$$

سیگنال های Wide-Sense Stationary:

ادامه مثال: سیگنال WSS

$$x(n) = \omega(n) + \omega(n-1)$$

$$\Rightarrow \; E\left[x(i)x(j)\right] =$$

$$= E\left[\omega(i)\omega(j)\right] + E\left[\omega(i)\omega(j-1)\right] + E\left[\omega(i-1)\omega(j)\right] + E\left[\omega(i-1)\omega(j-1)\right]$$

$$= \sigma^2\left[2\delta(j-i) + \delta(j-i-1) + \delta(j-i+1)\right] = \sigma^2\left[2\delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k+1)\right]$$

نتیجه:متغیرهای تصادفی $x(i)$ و $x(j)$ همبسته هستند اگر

$$\begin{cases} j = i \\ j = i-1 \\ j = i+1 \end{cases}$$

تخمین تابع خود همبستگی (Autocorrelation)

اگر $\boldsymbol{x}(n)$ یک سیگنال WSS با میانگین صفر باشد. تخمین از تابه خود همبستگی $R_x(k)$ را با $\hat{R}_x(k)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می نمایند.

$x(1), x(2), \ldots, x(N):$ sample values of RV $\boldsymbol{x}(n)$

$$\boxed{\hat{R}_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k} x(i)x(i+k), \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1}$$

* $\hat{R}_x(k) = \hat{R}_x(-k), \qquad k = -1,-2,\ldots,-N+1$

تخمین تابع خود همبستگی (Autocorrelation)

به منظور ارزیابی وضعیت تخمین $\hat{R}_x(k)$ به صورت زیر عمل می شود:

$$\hat{R}_x(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k} x(i)x(i+k), \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\Rightarrow E\left[\hat{R}_x(k)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-k} E\left[x(i)x(i+k)\right] = \frac{N-k}{N}E\left[R_x(k)\right]$$

در نتیجه $\hat{R}_x(k)$ یک تخمین بایاس شده از $R_x(k)$ است.

* $E\left[\hat{R}_x(k)\right] \neq E\left[R_x(k)\right]$

در بهترین حالت:

* $\left(\text{If} \quad N \to \infty\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\hat{R}_x(k) \cong R_x(k)\right)$

طیف توان (Power Spectrum):

اگر $x(n)$ یک سیگنال WSS با میانگین صفر باشد. تابع چگالی توان (power spectral density) و/یا (power spectrum) آن با تبدیل فوریه گسسته در زمان آن و به صورت زیر تعریف می گردد:

$$S_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k) e^{-jk\omega} \qquad (2.67)$$

این تابع توزیع فرکانسی توان سیگنال را بر حسب فرکانس بیان می کند.

$$properties: \begin{cases} S_x(e^{j\omega}) \geq 0 \\ S_x(e^{j\omega}) \in \Re \\ S_x(e^{j\omega}) \text{ is periodic fuction of } \omega \text{ with period } 2\pi \\ S_x(e^{j\omega}) \text{ is symmetric about } \omega = 0 \end{cases}$$

طیف توان (Power Spectrum):

مثال: نویز سفید WSS با میانگی صفر را در نظر بگیرید

$x(n)$: white noise

$$\rightarrow \quad R_x(k) = \sigma^2 \delta(k)$$

$$\Rightarrow \quad S_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k) e^{-jk\omega} = \sigma^2 \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) e^{-jk\omega} \right]$$

در نتیجه طیف توان سیگنال نویز سفید دارای دامنه ثابتی برابر σ^2 است که به آن توان نویز گویند.

طیف توان (Power Spectrum):

توجه: شرط همگرایی معادله (۲.۶۷) عبارت است از اینکه

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| R_x(k) \right| < \infty$$

و این شرط بر قرار خواهد بود اگر و فقط اگر $S_x(z)$ دارای هیچ قطبی روی دایره واحد نباشد.

$$S_x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k) z^{-k} = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad (2.69)$$

دو سیگنال تصادفی

دو سیگنال تصادفی را jointly distributed گویند اگر هر دوی انها روی یک فضای احتمالی S تعریف شده باشند.

Cross Correlation function:

$$R_{x,y}(i,j) = E\left[x(i), y(j)\right] \quad i, j: \text{ integer values}$$

اگر $x(n)$ و $y(n)$ دو متغیر تصادفی WSS باشند آنگاه تابع $R_{x,y}(i,j)$ تابعی از تفاضل $j-i$ خواهد بود.

$$S_x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(k) z^{-k} = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad (2.69)$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

ابتدا یک سیستم غیر تصادفی (deterministic) با ورودی غیر تصادفی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(n,i)u(i) \qquad (2.73)$$

که $h(n,i)$ پاسخ ضربه سیستم می باشد.

اگر این سیستم نامتغیر با زمان باشد رابطه (۲.۷۳) را میتوان به صورت زیر بازنویس نمود

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(n-i)u(i) \qquad (2.74)$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

اگر ورودی این سیستم یک ورودی تصادفی $\boldsymbol{\omega}(n)$ باشد. سیگنال تصادفی خروجی عبارت است از:

$$\boldsymbol{y}(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(n,i)\boldsymbol{\omega}(i) \qquad (2.75)$$

که $h(n,i)$ پاسخ ضربه سیستم می باشد.

اگر این سیستم نامتغیر با زمان باشد رابطه (۲.۷۵) را میتوان به صورت زیر بازنویس نمود

$$\boldsymbol{y}(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(n-i)\boldsymbol{\omega}(i) \qquad (2.76)$$

با توجه به اینکه $\boldsymbol{\omega}(n)$ یک متغیر تصادفی است و یک عدد نیست لذا از روابط فوق $\boldsymbol{y}(n)$ قابل محاسبه نمی باشد.

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

اگر $\omega(n)$ به عنوان نمونه های از $\omega(n)$ معرفی شود آنگاه روابط (۲.۷۵) و (۲.۷۶) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n,i)\omega(i) \qquad (2.77)$$

که $h(n,i)$ پاسخ ضربه سیستم می باشد.

اگر این سیستم نامتغیر با زمان باشد رابطه (۲.۷۷) را میتوان به صورت زیر بازنویس نمود

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)\omega(i) \qquad (2.78)$$

خروجی این معادلات، $y(n)$ ، نمونه هایی از متغیر تصادفی $y(n)$ است.

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

اما نکته مهم محاسبه خصوصیات تصادفی متغیر تصادفی خروجی به صورت تابعی از خصوصیات متغیر تصادفی $\omega(n)$ است.

اما در حالت کلی این امکان وجود ندارد، ولیکن به صورت یک استثنا در صورتی که ورودی یک متغیر تصادفی گوسین باشد متغیر تصادفی خروجی نیز یک متغیر تصادفی گوسین خواهد بود که میانگین و واریانس آن قابل محاسبه است.

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

محاسبه تابع خود همبستگی خروجی:

به منظور محاسبه تابع خود همبستگی ابتدا WSS بودن خروجی به ازای ورودی تصادفی WSS اثبات می گردد.

در اینجا سیستم نامتغیر با زمان و پایدار BIBO فرض می شود.

$$(1)\quad y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(n-i)\omega(i)\rightarrow E\left[y(n)\right]=E\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(n-i)\omega(i)\right]$$

$$\rightarrow E\left[y(n)\right]=\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(n-i)\right)E\left[\omega(i)\right]$$

$$\xrightarrow{h\text{ is BIBO stable}}E\left[y(n)\right]=A\eta=\text{constant}$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

$$(2)\quad E\left[y(i)y(j)\right]=E\left[\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty}h(i-r)\omega(r)\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(j-l)\omega(l)\right)\right]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(i-r)h(j-l)E\left[\omega(r)\omega(l)\right]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(i-r)h(j-l)E\left[\omega(\underbrace{r+k}_{\bar{r}})\omega(\underbrace{l+k}_{\bar{l}})\right]$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(i-\bar{r}+k)h(j-\bar{l}+k)E\left[\omega(\bar{r})\omega(\bar{l})\right]$$

$$=E\left[\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty}h(i-\bar{r}+k)\omega(\bar{r})\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(i-\bar{r}+k)\omega(\bar{l})\right)\right]=E\left[y(i+k)y(j+k)\right]$$

❋ **در نتیجه هر دو شرط WSS بودن سیگنال خروجی برآورده گشته است.**

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

محاسبه تابع خود همبستگی

$$R_y(k) = E\left[y(n)y(n+k)\right] = E\left[y(0)y(k)\right] = E\left[\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} h(-r)\omega(r)\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k-l)\omega(l)\right)\right]$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-r)h(k-l)E\left[\omega(r)\omega(l)\right]$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-r)h(k-l)\underbrace{E\left[\omega(0)\omega(l-r)\right]}_{R_\omega(l-r)} \qquad (2.80)$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-r)h(k-l)R_\omega(l-r) = h(k)*h(-k)*R_\omega(k) \qquad (2.81)$$

که ٭ نشان دهنده اپراتور کانولوشن بوده و این رابطه توصیف کننده ارتباط ورودی-خروجی یک سیستم با ورودی تصادفی است.

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

محاسبات انجام شده در خصوص محاسبه تابع خود همبستگی خروجی برای یک سیستم نامتغیر با زمان و پایدار صورت گرفت. لذا لازم است به نکات زیر نیز توجه داشت:

$$1-If\ \begin{Bmatrix} \omega \text{ is not WSS} \\ h \text{ is T.I.} \end{Bmatrix} \Rightarrow y \text{ is not WSS}$$

$$2-If\ \begin{Bmatrix} \omega \text{ is WSS} \\ h \text{ is T.V.} \end{Bmatrix} \not\Rightarrow y \text{ is or is not WSS}$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

محاسبه تابع Cross Correlation بین ورودی-خروجی:

$$R_{\omega y}(k)=E\left[\omega(n)y(n+k)\right]=E\left[\omega(0)y(k)\right]=E\left[\omega(0)\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(k-i)\omega(i)\right)\right]$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(k-i)E\left[\omega(0)\omega(i)\right]$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(k-i)R_{\omega}(k)=h(k)*R_{\omega}(k) \qquad (2.86)$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

مثال: سیستم علی نا متغیر با زمانی را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} h(n)=a^{n}, \ n>0 \\ h(n)=0, \quad n<0 \\ |a|<1 \end{cases}$$

$$E\left[y(n)\right]=\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(n-i)\right)E\left[\omega(i)\right]=\frac{1}{1-a}E\left[\omega(n)\right]$$

$$(2.81)\rightarrow\ R_{y}(k)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}a^{k-r-l}R_{\omega}(l-r)$$

اگر فرض شود که ورودی نویز سفید با میانگین صفر و واریانس σ^2 است آنگاه:

$$R_{\omega}(k)=\sigma^{2}\delta(k)$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

ادامه مثال:

در نتیجه

$$(2.81) \rightarrow R_y(k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a^{k-r-l} R_\omega(l-r) =$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{0} a^{k-2r}\sigma^2 = \sigma^2 a^k \sum_{r=0}^{\infty} a^{2r} = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^k, \quad \text{for } k \geq 0$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

چگالی طیفی خروجی:

برای سیستم LTI مفروض در اسلایدهای قبل تابع چگالی طیفی به صورت زیر خواهد بود. با استفاده از تبدیل فوریه گسسته در زمان:

$$(2.81) \rightarrow S_y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})S_\omega(e^{j\omega})$$

$$\rightarrow S_y(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 S_\omega(e^{j\omega}) \qquad (2.88)$$

اگر ورودی نویز سفید با واریانس σ^2 باشد، آنگاه:

$$\boxed{S_y(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \sigma^2}$$

سیستم های گسسته در زمان با ورودی های تصادفی

جمع بندی:

$$S_y(z) = Z\left[R_y(k)\right]$$

$$S_\omega(z) = Z\left[R_\omega(k)\right]$$

$$\boxed{(2.88) \xrightarrow{Z\ \text{trans.}} S_y(z) = H(z)H(z^{-1})S_\omega(z) \qquad (2.89)}$$

$$S_{\omega y}(z) = Z\left[R_{\omega y}(k)\right]$$

$$\boxed{(2.86) \xrightarrow{Z\ \text{trans.}} S_{\omega y}(z) = H(z)S_\omega(z) \qquad (2.90)}$$

توصیف سیستم به صورت معادله تفاضلی

یکی از شکل های مهم توصیف ارتباط ورودی-خروجی توصیف به صورت معادله تفاضلی است.

$$y(n) = \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i) + \sum_{j=0}^{M} b_j \omega(n-j) \qquad (2.91)$$

که تابع تبدیل متناظر با آن در حوزه Z عبارت است از:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_N z^{-N}}$$

توصیف سیستم به صورت معادله تفاضلی

مثال (محاسبه میانگین):

$$y(n) = ay(n-1) + \omega(n)$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \rightarrow \begin{cases} h(n) = ? = a^n, & n \geq 0 \\ h(n) = ? = 0, & n < 0 \end{cases}$$

به منظور مقایسه نتایج با محاسه میانگین سیگنال خروجی آغاز خواهیم کرد:

$$E[y(n)] = aE[y(n-1)] + E[\omega(n)] = aE[y(n-1)] + \eta$$

به شرط $|a| < 1$:

$$E[y(n)] = \frac{1}{1-a}\eta$$

توصیف سیستم به صورت معادله تفاضلی

مثال: (محاسبه تابع خود همبستگی خروجی)

$$y(n) = ay(n-1) + \omega(n)$$

$$\begin{aligned} R_y(k) &= E[y(n)y(n+k)] \\ &= E[ay(n)y(n+k-1) + y(n)\omega(n+k)] \\ &= aE[y(n)y(n+k-1)] + E[y(n)\omega(n+k)] \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $y(n)$ **هیچ وابستگی به** $\omega(n+j)$ **برای** $j \geq 1$ **ندارد :**

$$E[y(n)\omega(n+k)] = E[y(n)]E[\omega(n+k)] = 0$$

توصیف سیستم به صورت معادله تفاضلی

ادامه مثال: (محاسبه تابع خود همبستگی خروجی)

$$R_y(k) = aE\left[y(n)y(n+k-1)\right] = aR_y(k-1)$$

$$\Rightarrow R_y(k) = a^k R_y(0)$$

از طرفی:
$$R_y(0) = E\left[y^2(n)\right] = E\left[\left(ay(n-1)+\omega(n)\right)^2\right] = a^2 R_y(0) + R_\omega(0)$$

$$\Rightarrow R_y(0) = \frac{1}{1-a^2} R_\omega(0)$$

$$\boxed{\Rightarrow R_y(k) = \frac{a^k}{1-a^2} R_\omega(0)}$$

توصیف سیستم با استفاده از معادلات حالت

از دیگر شکل های مهم توصیف سیستم، استفاده از معادلات حالت است.

$$x(n+1) = \Phi_{N\times N} x(n) + \Gamma_{N\times m}\omega(n)$$
$$y(n) = C_{p\times N} x(n)$$

این سیستم ها معمولا با نحوه انتشار میانگین و کوواریانس متغیرهای حالت و خروجی مشخص می شوند. لذا:

$$E\left[x(n+1)\right] = \Phi_{N\times N} E\left[x(n)\right] + \Gamma_{N\times m} E\left[\omega(n)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\Rightarrow E\left[x(n)\right] = \Phi^n E\left[x(0)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi^{n-i-1}\Gamma_{N\times m}\left[\omega(n)\right]\\&\Rightarrow E\left[y(n)\right] = C\Phi^n E\left[x(0)\right] + \sum_{i=0}^{n-1} C\Phi^{n-i-1}\Gamma_{N\times m}\left[\omega(n)\right]\end{aligned}}$$

توصیف سیستم با استفاده از معادلات حالت

که اگر $E\left[\omega(n)\right]=0$ باشد:

$$\Rightarrow E\left[x(n)\right]=\Phi^n E\left[x(0)\right]=\Phi^n x(0)$$
$$\Rightarrow E\left[y(n)\right]=C\Phi^n E\left[x(0)\right]=C\Phi^n x(0)$$

حال به منظور مشخص نمودن نحوه انتشار کوواریانس:

$$\begin{aligned}P(n+1)&=Cov\left[x(n+1)\right]=Cov\left[\Phi x(n)+\Gamma\omega(n)\right]\\&=Cov\left[\Phi x(n)\right]+Cov\left[\Gamma\omega(n)\right]\\&=\Phi Cov\left[x(n)\right]\Phi^T+\Gamma Cov\left[\omega(n)\right]\Gamma^T\\&=\Phi P(n)\Phi^T+\Gamma Cov\left[\omega(n)\right]\Gamma^T\end{aligned}$$

توصیف سیستم با استفاده از معادلات حالت

در نتیجه نحوه انتشار کوواریانس حالت ها عبارت است از:

$$P(n)=\Phi^n P(0)\left(\Phi^T\right)^n+\sum_{i=0}^{n-1}\Phi^i\Gamma Cov\left[\omega(n)\right]\Gamma^T\left(\Phi^T\right)^i,\qquad \text{for } n=1,2,\ldots \tag{2.106}$$

و همچنین نحوه انتشار کوواریانس خروجی ها عبارت است از:

$$Cov\left[y(n)\right]=C\Phi^n P(0)\left(\Phi^T\right)^n C^T+\sum_{i=0}^{n-1}C\Phi^i\Gamma Cov\left[\omega(n)\right]\Gamma^T\left(\Phi^T\right)^i C^T,\qquad \text{for } n=1,2,\ldots \tag{2.107}$$

توصیف سیستم با استفاده از معادلات حالت

و اگر خروجی اندازه گیری به صورت زیر تعریف شود:

$$z(n) = Cx(n) + v(n)$$

آنگاه:

$$Cov\left[z(n)\right] = C\Phi^{n} P(0)\left(\Phi^{T}\right)^{n} C^{T} + \sum_{i=0}^{n-1} C\Phi^{i}\Gamma Cov\left[\omega(n)\right]\Gamma^{T}\left(\Phi^{T}\right)^{i} C^{T} + Cov\left[v(n)\right] \tag{2.108}$$

باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 3

تخمین بهینه

مقدمه

- تخمین بهینه عبارت است از <u>بهترین حدس</u> ممکن.

- در این بخش پس از ارائه مباحث بنیادی تخمین بهینه و خواص مطلوب مد نظر در آن، سه مبحث مهم تخمین بهینه ارائه می گردد:
  - **Maximum Likelihood**
  - **Maximum a Posteriori**
  - **Minimum Mean-Square Error**

که هر یک از این سه روش منجر به تخمین های متفاوت و تخمینگرهای مختلفی می شوند.

فرموله سازی

- سیگنال $s(t)$ و فرم گسسته آن به صورت $s(n)$ را در نظر بگیرید. همچنین اندازه گیری صورت گرفته $z(n)$ قابل بازنویسی به صورت زیر است:

$$z(n) = g(s(n), v(n), n)$$

که $v(n)$ سیگنال نویز است.

- هدف: یافتن تخمین بهینه $s(n)$ است در مرحله n با استفاده از اندازه گیری های $z(1),\ z(2),\ \dots,\ z(n)$ که می توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$\boxed{\hat{s}(n) = \alpha_n(z(1),\ z(2),\ \dots,\ z(n))}$$

فرموله سازی

$$\boxed{\hat{s}(n) = \alpha_n(z(1),\ z(2),\ \dots,\ z(n))}$$

- پر واضح است که این رابطه نشان می دهد که تخمینگر ممکن است غیرخطی و/یا متغیر با زمان باشد.
- به منظور تعریف یک قضیه بهینه سازی و خروج از ابهامات مساله کلی فوق سیگنال های $s(n)$ و $v(n)$ به صورت سیگنال های تصادفی با توزیع مشترک (**jointly distributed**) روی فضای احتمال S در نظر گرفته می شوند. لذا سیگنال اندازه گیری $z(n)$ نیز یک سیگنال تصادفی روی فضای احتمال S خواهد بود.

$$z(n) = g(s(n), v(n), n)$$

- در نتیجه سیگنال تخمین زده شده $\hat{s}(n)$ نیز یک سیگنال تصادفی بر روی فضای احتمال S به صورت $\hat{s}(n) = \alpha_n(z(1),\ z(2),\ \dots,\ z(n))$ خواهد بود.

تعریف مساله تخمین بهینه

مطلوب است طراحی تخمینگر بهینه و یافتن تخمین بهینه $s(n)$ از سیگنال $\hat{s}(n)$ با داشتن مقادیر اندازه گیری شده $z(1),\ z(2),\ \ldots,\ z(n)$ ، شناختن تابع g و آشنایی با قضایای بهینه سازی.

$$\boxed{\hat{s}(n)=\alpha_n\left(z(1),\ z(2),\ \ldots,\ z(n)\right)}$$

سه نوع مهم از مسائل تخمین

Filtering: در این حالت سیگنال $s(n)$ در لحظه n با استفاده از اندازه گیری های $z(1),\ z(2),\ \ldots,\ z(n)$ تخمین زده می شود.

Prediction: در این حالت مقدار سیگنال $s(.)$ در لحظات آینده (بعد از n) با استفاده از مشاهدات $z(1),\ z(2),\ \ldots,\ z(n)$ تخمین زده می شود. به عنوان مثال تخمین $s(n+1)$ و $s(n+20)$.

Smoothing: در این حالت مقدار سیگنال $s(.)$ در لحظات قبل از n با استفاده از مشاهدات $z(1),\ z(2),\ \ldots,\ z(n)$ تخمین زده می شود. به عنوان مثال تخمین $s(n-1)$ و $s(n-16)$.

سه نوع مهم از مسائل تخمین

بنابراین می توان مساله تخمین را به صورت کلی زیر بیان نمود که:

"یافتن بهترین حدس یا تخمین ممکن برای مقدار $s(l)$ با استفاده از مشاهدات $z(1),\ z(2),\ \ldots,\ z(n)$."

l	**Estimate**	**Estimation Problem**
n	$\hat{s}(n)$	Filtering
$n+1$	$\hat{s}(n+1)$	One-step prediction
$n+m,\ m>0$	$\hat{s}(n+m)$	*m*-step prediction
$n-1$	$\hat{s}(n-1)$	Smoothing with lag 1
$n-m,\ m>0$	$\hat{s}(n-m)$	Smoothing with lag *m*
m constant	$\hat{s}(m)$	Fixed-point smoothing

خواص تخمین

به منظور ارزیابی یک تخمینگر لازم است شرایطی معرفی گردد که بتوان با استفاده از آن رفتار تخمینگر را بررسی نمود.

۱- *Unbiased Estimation*

یکی از مهمترین خواص لازم برای یک تخمین مناسب عبارت است از اینکه:

$$\boxed{E\left[\hat{s}(n)\right]=E\left[s(n)\right]}$$

به عبارت دیگر میانگین خطای تخمین $\tilde{s}(n)$ لازم است برابر صفر باشد

$$E\left[\tilde{s}(n)\right]=0$$

خواص تخمین

برای تخمین هایی که وابسته به ترم های زمانی هستند و تخمیین بدون بایاس به صورت *Asymptotically Unbiased Estimation* مطرح می گردد (که شرط ضعیف تری محسوب می گردد):

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\hat{s}(n)\right] = E\left[s(n)\right]$$

۲- *Consistent Estimator*

معیار دیگر که میتوان برای ارزیابی تخمینگر ها مورد استفاده قرار می گیرد، بررسی وضعیت میانگین مربعات خطای(MSE) تخمین است.

اگر خطای تخمین برابر صفر باشد آنگاه به آن تخمینگر یک تخمینگر **consistent** گویند.

$$\boxed{E\left[\tilde{s}^2(n)\right] = 0}$$

خواص تخمین

اگر هر دو شرط ۱ و ۲ در مورد یک تخمین برقرار باشد به آن تخمین کامل گویند.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 1-\begin{bmatrix} E\left[\hat{s}(n)\right] = E\left[s(n)\right] \\ \vee \\ \lim_{n\to\infty} E\left[\hat{s}(n)\right] = E\left[s(n)\right] \end{bmatrix} \\ 2-E\left[\tilde{s}^2(n)\right] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{s}(n) \text{ is perfect estimate of } s(n)}$$

خواص تخمین

$s(n) = s$

$z(n) = s + v(n)$

$v(n)$: *zero mean additive white noise*

$s, v(n)$ are independent

مثال: تحلیل فیلتر میانگین

$$\text{mean filter} \rightarrow \quad \hat{s}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z(j)$$

$$E\left[\hat{s}(n)\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[z(j)\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[s + v(j)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(E\left[s\right] + E\left[v(j)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(E\left[s\right]\right) = E\left[s\right]$$

* در نتیجه این تخمینگر یک تخمینگر ***unbiased*** است.

خواص تخمین

ادامه مثال: تحلیل فیلتر میانگین

$$E\left[\tilde{s}^2(n)\right] = E\left[\left(s - \hat{s}(n)\right)^2\right] = E\left[s^2 - 2s\hat{s}(n) + \hat{s}^2(n)\right] = E\left[s^2\right] - 2\underbrace{E\left[s\hat{s}(n)\right]}_{?} + \underbrace{E\left[\hat{s}^2(n)\right]}_{?}$$

$$E\left[s\hat{s}(n)\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[sz(j)\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[s\left(s + v(j)\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left[s^2 + sv(j)\right] = E\left[s^2\right]$$

$$E\left[\hat{s}^2(n)\right] = \frac{1}{n^2} E\left[\left(z(1) + z(2) + \cdots + z(n)\right)\left(z(1) + z(2) + \cdots + z(n)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} E\left[\left(ns + v(1) + v(2) + \cdots + v(n)\right)\left(ns + v(1) + v(2) + \cdots + v(n)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left\{\left(nE\left[s^2\right] + \sigma_v^2\right)n\right\} = E\left[s^2\right] + \frac{\sigma_v^2}{n}$$

خواص تخمین

ادامه مثال: تحلیل فیلتر میانگین

$$\Rightarrow \; E\left[\tilde{s}^2(n)\right] = E\left[s^2\right] - 2E\left[s^2\right] + E\left[s^2\right] + \frac{\sigma_v^2}{n} = \frac{\sigma_v^2}{n}$$

$$\Rightarrow \; \lim_{n\to\infty} E\left[\tilde{s}^2(n)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_v^2}{n} = 0$$

❈ در نتیجه با افزایش n این تخمینگر یک تخمینگر ***Consistent*** خواهد بود. و در نتیجه این تخمینگر با شرایط مطرح شده یک تخمینگر کامل است.

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

متغیر تصادفی x با تابع چگالی تصادفی *unimodal* $f_x(x)$ را در نظر بگیرید. پیش از این گفته شد که محتمل ترین مقدار x متناظر است با مقداری از x که موجب ماکزیمم شدن $f_x(x)$ می گردد.

❈ با توجه به توضیح فوق و با فرض اینکه مقادیر مشاهده های انجام شده را با می توان به صورت $z = g(s,v)$ بیان نمود، پیشنهاد می گردد که تخمین s با یافتن مقداری از s بدست آید که محتمل ترین مقدار آن برای تولید z است.

$$\hat{s}_{ML} = \text{values of } s \text{ that maximizes } f_z(z \mid \mathbf{s} = s)$$

$$\text{where, } f_z(z \mid \mathbf{s} = s): \; \textit{likelihood function}$$

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

به عبارت دیگر:

$$\hat{s}_{ML} = \text{values of } s \text{ for which } \frac{\partial f_z(z \mid \mathbf{s}=s)}{\partial s} = 0 \qquad (3.9)$$

همچنین با توجه به اینکه تابع لگاریتم طبیعی یک تابع بطور یکنواخت افزایشی است لذا می توان رابطه (۳.۹)را به صورت زیر بازنویسی نمود و با عنوان *log-likelihood function* شناخته می شود.

$$\hat{s}_{ML} = \text{values of } s \text{ for which } \frac{\partial \ln f_z(z \mid \mathbf{s}=s)}{\partial s} = 0 = \alpha(z) \qquad (3.10)$$

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

مثال(۳.۲): (تخمین ML)

$$f_{s,z}(s,z) = \begin{cases} \frac{1}{12}(s+z)e^{-z}, & 0 \le s \le 4,\ \ 0 \le z < \infty \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

هدف یافتن تخمین ML، s است از مشاهدات z

$$f_z(z \mid \mathbf{s}=s) = \frac{f_{s,z}(s,z)}{f_s(s)}$$

$$f_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{s,z}(s,z)dz = \int_0^{\infty} \frac{1}{12}(s+z)e^{-z}dz = \frac{1}{12}\left[-se^{-z} - ze^{-z} - e^{-z}\right]_0^{\infty} = \frac{s+1}{12}$$

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

ادامه مثال: (تخمین ML)

$$f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)=\frac{s+z}{s+1}e^{-z},\qquad 0\le s\le 4,\quad 0\le z<\infty$$

$$\frac{\partial f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\frac{s+z}{s+1}e^{-z}=\frac{1-z}{(s+1)^2}e^{-z}$$

:

$$\begin{cases} z>1, & \dfrac{\partial f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)}{\partial s}<0 \;\Rightarrow\; \left\{\text{s=0} \rightarrow \max\, f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)\right\} \\ 0\le z<1, & \dfrac{\partial f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)}{\partial s}>0 \;\Rightarrow\; \left\{\text{s=4} \rightarrow \max\, f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)\right\} \\ z=1, & \dfrac{\partial f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)}{\partial s}=0 \;\Rightarrow\; \left\{\text{s=arbitrarily value=} 22/9\right\} \end{cases}$$

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

ادامه مثال: (تخمین ML)

$$\hat{s}_{ML}=\begin{cases} 4, & 1\le z<\infty \\ \dfrac{22}{9}, & z=1 \\ 0, & 0\le z<1 \end{cases}$$

:

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

مثال(۳.۳): (تخمین ML با نویز گوسی)

$z = s + v$

$$f_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

با فرض استقلال s و v پیش از این نشان داده شده است که

$$f_z(z \mid \mathbf{s} = s) = f_v(v)|_{v=z-s} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-s)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \hat{s}_{ML} = z$$

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

مثال(۳.۴): (آشکارسازی سیگنال با استفاده از تخمین ML)

$$z = \begin{cases} s + v, & \text{the signal is present} \\ v, & \text{the signal is not present} \end{cases}$$

$s, v \in S_1$

با فرض استقلال s و v. هدف آشکاسازی حضور و عدم حضور سیگنال است. به منظور آشکارسازی حضور سیگنال با استفاده از تخمین ML متغیر تصادفی c در فضای احتمال S_2 شامل دو رویداد حضور و/یا عدم حضور سیگنال

$$c = \begin{cases} 1, & \text{the signal is present} \\ 0, & \text{the signal is absent} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = cs + v \quad \in S_1 \times S_2$$

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

ادامه مثال(۳.۴): (آشکارسازی سیگنال با استفاده از تخمین ML)

$\hat{c}_{ML}$ = values of i that maximizes the likelihood function $f_z(z \mid c = i)$

با توجه به دو مقداره بودن تابع:

$$\Rightarrow \quad \hat{c}_{ML} = \begin{cases} 1, & f_z(z \mid c = 1) > f_z(z \mid c = 0) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

مثال: (تخمین ML از مشاهدات متعدد)

$$s(n) = s$$
$$z(n) = s + v(n)$$
$$v(n) \sim N(0, \sigma^2)$$

با فرض استقلال s و v برای هر مقدار n.

$$Z_n = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix}, \quad V_n = \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix}$$

با توجه به تعریف تخمین ML:

$\hat{s}_{ML}$: value of s that maximizes the likelihood function $f_{Z_n}(Z_n \mid \mathbf{s} = s)$

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

ادامه مثال: (تخمین ML از مشاهدات متعدد)

به منظور محاسبه $f_{Z_n}(Z_n \mid \mathbf{s}=s)$ لازم است $f_{V_n}(V_n)$ محاسبه گردد

که با توجه به توصیف $v(n)$ خواهیم داشت:

$$f_{V_n}(V_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|P_n|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}V_n^T P_n^{-1} V_n}$$

$P_n = Cov[V_n]$

$|P_n|$: determinant of P_n

حال بردارمشاهدات را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$Z_n=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}s+V_n=\beta s+V_n$$

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

ادامه مثال: (تخمین ML از مشاهدات متعدد)

با توجه به آنچه در بخش پیشین ارائه شد:

$$f_{Z_n}(Z_n \mid \mathbf{s}=s)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\,|P_n|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}(Z_n-\beta s)^T P_n^{-1}(Z_n-\beta s)}$$

$$\frac{\partial f_{Z_n}(Z_n \mid \mathbf{s}=s)}{\partial s}=0 \rightarrow \boxed{\hat{s}_{ML}=\left[\beta^T P_n^{-1}\beta\right]^{-1}\beta^T P_n^{-1} Z_n}$$

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

ادامه مثال: (تخمین ML از مشاهدات متعدد)

اگر $P_n = \sigma^2 I$ باشد، آنگاه

$$\beta^T P_n^{-1} \beta = \frac{n}{\sigma^2}$$

$$\beta^T P_n^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{s}_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z(j)}$$

تخمین ماکزیمم احتمال

(Maximum Likelihood Estimation)

جمع بندی: روش ML به تابع چگالی احتمال $f_s(s)$ وابسته نیست و به عنوان روش *non-Bayesian* شناخته می شود. به عبارت دیگر این روش تخمین به شناخت سیگنال نیاز ندارد. لذا این روش یکی از کلی ترین روش های تخمین بهینه محسوب می گردد. به عبارت دیگر بسیاری دیگر از ضوابط تخمین بهینه را می توان زیر مجموعه روش ML دانست زمانیکه اطلاع و دانش بیشتری در مورد سیگنال در دست است.

* لازم به ذکر است که نقطه ضعف عمده این روش محاسبه *likelihood function* است که به سادگی امکان پذیر نیست.

Maximum *a posteriori* Estimation

با فرض وجود مشاهدات $z = g(s,v)$ ، محتمل ترین مقدار s به منظور رخ دادن مقداری خواهد بود که تابع چگالی شــرطی $z = f_s(s\,|\,\mathbf{z} = z)$ را ماکزیمم نماید.

$$\hat{s}_{MAP} = \text{values of } s \text{ for which } \frac{\partial f_s(s\,|\,\mathbf{z}=z)}{\partial s} = 0 \qquad (3.16)$$

با توجه به رابطه **Bayes** و مستقل بودن $f_z(z)$ از مقدار s رابطه (۳.۱۶) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\hat{s}_{MAP} = \text{values of } s \text{ for which } \frac{\partial f_z(z\,|\,\mathbf{s}=s)\, f_s(s)}{\partial s} = 0 \qquad (3.17)$$

Maximum *a posteriori* Estimation

با توجه به اینکه در این روش تخمین، تــابع چگــالی احتمــال $f_s(s)$ بایــد معلوم باشد تفاوت عمده این روش با روش **ML** کاملا مشــخص مــی گردد.

❉ با توجه به استفاده از رابطه **Bayes** در روش تخمین **MAP**، ایــن روش به عنوان یکی از فرم های **Bayesian Estimation** محسوب می گردد.

Maximum *a posteriori* Estimation

مثال(۳.۶): تخمین MAP با حضور نویز گوسی

$z = s + v$

$v \sim N(0, \sigma_v^2)$

$s \sim N(\eta_s, \sigma_s^2) \quad \rightarrow \quad f_s(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} e^{-\frac{(s-\eta_s)^2}{2\sigma_s^2}}$

$$Ex-2.14 \rightarrow \quad f_z(z \mid \mathbf{s} = s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{(z-s)^2}{2\sigma_v^2}}$$

$$\Rightarrow \quad f_z(z \mid \mathbf{s} = s) f_s(s) = \frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_s} e^{-\frac{(z-s)^2}{2\sigma_v^2} - \frac{(s-\eta_s)^2}{2\sigma_s^2}}$$

$$\frac{\partial f_z(z \mid \mathbf{s} = s) f_s(s)}{\partial s} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{s}_{MAP} = \eta_s + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_v^2}(z - \eta_s)}$$

Maximum *a posteriori* Estimation

ادامه مثال(۳.۶):

$$\sigma_v^2 << \sigma_s^2 \Rightarrow \hat{s}_{MAP} = z \overset{Ex-3.3}{=} \hat{s}_{ML}$$

به عبارت دیگر در صورتی که توان نویز در مقابل توان سیگنال کوچک باشد تخمین MAP و ML برابر هستند.

*** از سوی دیگر اگر $\sigma_s^2 \rightarrow \infty$ تابع چگالی سیگنال گوسی به صورت یک تابع چگالی یکنواخت در خواهد آمد. این حالت معادل نداشتن اطلاعات قبلی در مورد s است.**

Maximum *a posteriori* Estimation

مثال(۳.۷): کاربرد تخمین MAP در آشکاری سیگنال

$z = cs + v$

$f_c(c)$ is known

$\hat{c}_{MAP}$: values of c that maximise $f_z(z \mid \mathbf{c} = c)\, f_c(c)$

$$\begin{cases} c = 1 \rightarrow probability = p \\ c = 0 \rightarrow probability = 1 - p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f_z(z \mid \mathbf{c} = i)\, f_c(i) = \begin{cases} f_z(z \mid \mathbf{c} = 1)\, p & \text{if } c = 1 \\ f_z(z \mid \mathbf{c} = 0)(1 - p) & \text{if } c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{c}_{MAP} = \begin{cases} 1, & \text{if } \quad f_z(z \mid \mathbf{c} = 1)\, p > f_z(z \mid \mathbf{c} = 0)(1 - p) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Maximum *a posteriori* Estimation

ادامه مثال(۳.۷): کاربرد تخمین MAP در آشکاری سیگنال

$z = cs + v$

$f_c(c)$ is known

$$\Rightarrow \quad \hat{c}_{MAP} = \begin{cases} 1, & \text{if } \quad \dfrac{f_z(z \mid \mathbf{c} = 1)}{f_z(z \mid \mathbf{c} = 0)} > \dfrac{1 - p}{p} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

نسبت $\dfrac{f_z(z \mid \mathbf{c} = 1)}{f_z(z \mid \mathbf{c} = 0)}$ را *likelihood ratio* می نامند.

Minimum Mean-Square Error Estimation

با فرض وجود مشاهدات و اندازه گیری ها: $z = g(s, v)$

در این روش خطای تخمین به صورت $\tilde{s}$ تعریف می گردد:

$\tilde{s} = s - \hat{s}$

بر اساس آن MSE (میانگین مربعات خطا) عبارت است از:

$$MSE = E\left[(s-\hat{s})^2\right] = E\left[E\left[(s-\hat{s})^2 \mid z\right]\right] = E\left[E\left[\tilde{s}^2 \mid z\right]\right]$$

و تخمین MMSE عبارت است از محاسبه تخمین سیگنال s با استفاده از مینیمم نمودن میانگین مربعات خطای تخمین.

Minimum Mean-Square Error Estimation

قضیه ۳.۱- برای متغیر تصادفی مشاهدات z ، تخمین MMSE سیگنال s عبارت است از امید ریاضی شرطی:

$$\boxed{\hat{s}_{MMSE} = E\left[\boldsymbol{s} \mid \boldsymbol{z}\right]}$$

اثبات: اگر s و z دو متغیر تصادفی با توزیع مشترک با تابع چگالی احتمال $f_{s,z}(s,z)$ باشد آنگاه:

$$MSE = E\left[(s-\hat{s})^2\right] = E\left[\left(s-\alpha(z)\right)^2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(s-\alpha(z)\right)^2 f_{s,z}(s,z)dsdz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(s-\alpha(z)\right)^2 f_s(s \mid z=z) f_z(z)dsdz = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[s^2 - 2s\alpha(z) + \alpha^2(z)\right] f_s(s \mid z=z)dsf_z(z)dz$$

Minimum Mean-Square Error Estimation

ادامه اثبات قضیه ۳.۱ : با توجه به اینکه لازم است $\alpha(z)$ به عنوان تخمینی از s به ازای مشاهدات z محاسبه گردد و فقط انتگرال داخلی متغیر مورد نظر را در خود جای می دهد پس اگر این انتگرال به ازای این متغیر می نیمم گردد مقدار MSE می نیمم خواهد بود.

(لازم به ذکر است که انتگرال یک PDF نامنفی بوده و $f_s(s\,|\,\mathbf{z}=z)\geq 0$)

$$\rightarrow \;\text{minimize: } \Phi=\int_{-\infty}^{\infty}\left[s^2-2s\alpha(z)+\alpha^2(z)\right]f_s(s\,|\,z=z)ds$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha(z)}=0 \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{\infty}\left[-2s+2\alpha(z)\right]f_s(s\,|\,z=z)ds=0$$

$$\Rightarrow\; \alpha(z)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}f_s(s\,|\,z=z)ds}_{1}=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}sf_s(s\,|\,z=z)ds}_{E[s|z]} \;\Rightarrow\; \boxed{\hat{s}_{MMSE}=\alpha(z)=E\left[s\,|\,z\right]}$$

Minimum Mean-Square Error Estimation

خواص تخمین MMSE:

۱- تخمینگر حاصل یک تخمین منحصر به فرد ارائه می نماید یا به عبارت دیگر مقدار می نیمم مطلق در این تخمین حاصل می شود که علت آن با توجه به فرم مرتبه دوم MSE قابل توجیه است.

۲- تخمین MMSE یک تخمین *unbiased* است. (این خاصیت در حالیکه تعداد مشاهدات نیز محدود باشد برقرار است)

$$E\left[\hat{s}_{MMSE}\right]=E\left[\alpha(z)\right]=E\left[E\left[s\,|\,z\right]\right]=E\left[s\right]$$

۳- تخمین MMSE یک نوع دیگر از مجموعه ***Bayesian Estimation*** است. چرا که با توجه به استفاده از رابطه Bayes این تخمین به داشتن اطلاعاتی از s نیاز دارد.

Minimum Mean-Square Error Estimation

مثال۳.۸: (تخمین MMSE با حضور نویز گوسی)

$z = s + v$

$v \sim N(0, \sigma_v^2)$

we require knowledge of s, so we assume $s \sim N(\bar{s}, \sigma_s^2)$

Also, assume that s and v are *uncorrelated*

$$\Rightarrow \begin{cases} E[z] = E[s] = \bar{s} \\ Var[z] = Var[s] + Var[v] = \sigma_s^2 + \sigma_v^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z \sim N(\bar{s}, \sigma_s^2 + \sigma_v^2) \quad \Rightarrow \quad f_z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_v^2}} e^{-\frac{(z-\bar{s})^2}{2(\sigma_s^2+\sigma_v^2)}}$$

Minimum Mean-Square Error Estimation

ادامه مثال۳.۸: (تخمین MMSE با حضور نویز گوسی)

$$\Rightarrow \quad f_s(s \mid \mathbf{z} = z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\sigma_s^2\sigma_v^2}{\sigma_s^2+\sigma_v^2}}} e^{-\left[-\frac{(z-\bar{s})^2}{2(\sigma_s^2+\sigma_v^2)} + \frac{(z-s)^2}{2\sigma_v^2} + \frac{(s-\bar{s})^2}{2\sigma_s^2}\right]} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{\sigma_s^2\sigma_v^2}{\sigma_s^2+\sigma_v^2}}} e^{-\frac{(s-\hat{s}_{MAP})^2}{2\frac{\sigma_s^2\sigma_v^2}{\sigma_s^2+\sigma_v^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{s}_{MMSE} = \bar{s} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_v^2}(z - \bar{s}) = \hat{s}_{MAP}$$

به عبارت دیگر اگر s و v دو متغیر تصادفی *uncorrelated* باشند، در این مثال تخمین MMSE از s معادل تخمین MAP است.

Minimum Mean-Square Error Estimation

قضیه ۳.۲: (اصل تعامد) خطای تخمین در تخمین MMSE برهر تـابعی از مشاهدات (z) عمود است.

$$\boxed{E\left[\left(s-E[s\mid z]\right)\gamma(z)\right]=0}$$

اثبات:

$$E\left[\left(s-E[s\mid z]\right)\gamma(z)\right]=E\left[E\left[\left(s-E[s\mid z]\right)\gamma(z)\mid z\right]\right]$$
$$=E\left[E\left[\left(s-E[s\mid z]\right)\mid z\right]\gamma(z)\right]=E\left[\left(E\left[(s)\mid z\right]-E\left[s\mid z\right]\right)\gamma(z)\right]=0$$

Minimum Mean-Square Error Estimation

قضیه ۳.۳: تخمین $\hat{s}=\alpha(z)$ یک تخمین MMSE از s است اگر و فقط اگـر خطای تخمین بر هر تابعی از مشاهدات مانند $\gamma(z)$ عمود باشد.

$$\boxed{\hat{s}=\alpha(z):\mathrm{MMSE}\quad\Leftrightarrow\quad E\left[\left(s-\alpha(z)\right)\gamma(z)\right]=0}$$

اثبات : ❋

توجه : قضیه ۳.۲ یکی از خواص تخمین MMSE را مطرح مـی نمایـد در حالیکه قضیه ۳.۳ یک شرط لازم و کافی را ارائه می کند که بر اسـاس آن می توان تخمین های MMSE را شناخت.

Minimum Mean-Square Error Estimation

قضیه ۳.۴: اگر Z نشانگر مجموعه ای محدود از مشاهدات به صورت

$$\boldsymbol{Z}=\{z(n), n_1 \le n \le n_2\}$$

باشد آنگاه تخمین MMSE عبارت خواهد بود از:

$$\boxed{\hat{s}(n)=E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]}$$

اثبات :

$$E\left[(s(n)-\alpha(\boldsymbol{Z}))^2\,|\,\boldsymbol{Z}\right]=E\left[(s(n)-E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]+E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]-\alpha(\boldsymbol{Z}))^2\,|\,\boldsymbol{Z}\right]$$
$$=E\left[(s(n)-E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}])^2\,|\,\boldsymbol{Z}\right]$$
$$+2E\left[(s(n)-E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}])(E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]-\alpha(\boldsymbol{Z}))\,|\,\boldsymbol{Z}\right]$$
$$+E\left[(E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]-\alpha(\boldsymbol{Z}))^2\,|\,\boldsymbol{Z}\right]$$

Minimum Mean-Square Error Estimation

ادامه اثبات قضیه ۳.۴:

$$E\left[(s(n)-E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}])(E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]-\alpha(\boldsymbol{Z}))\,|\,\boldsymbol{Z}\right]=$$
$$=E\left[(s(n)-E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}])\,|\,\boldsymbol{Z}\right](E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]-\alpha(\boldsymbol{Z}))$$
$$=\left\{E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]-E\left[E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]\,|\,\boldsymbol{Z}\right]\right\}(E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]-\alpha(\boldsymbol{Z}))$$
$$=\left\{E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]-E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z})]\right\}(E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]-\alpha(\boldsymbol{Z}))$$
$$=0$$

$$\Rightarrow\; E\left[(s(n)-\alpha(\boldsymbol{Z}))^2\,|\,\boldsymbol{Z}\right]=E\left[(s(n)-E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}])^2\,|\,\boldsymbol{Z}\right]+E\left[(E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]-\alpha(\boldsymbol{Z}))^2\,|\,\boldsymbol{Z}\right]$$
$$\ge E\left[(s(n)-E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}])^2\,|\,\boldsymbol{Z}\right]$$

$$\overset{E[\ ]}{\Rightarrow}\;\text{MSE}=E\left[(s(n)-\alpha(\boldsymbol{Z}))^2\right]\ge E\left[(s(n)-E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}])^2\right]$$

$$\Rightarrow\;\boxed{\hat{s}_{MMSE}=E[s(n)\,|\,\boldsymbol{Z}]}$$

Linear MMSE Estimation

با توجه به اینکه محاسبه تخمین MMSE وابسته به محاسبه $f_s(s\,|\,\mathbf{z}=z)$ است و محاسبه این تابع چگالی شرطی میتواند بسیار مشـکل باشـد، لذا به دنبال جایگزینی تابع $\alpha(z)$ با کلاس خاصی از تابع ها هستیم تا با محدودتر نمودن مساله یک حل ممکن ارائه گردد.

کلاس مهم و قدرتمندی از توابع که می تواند به عنوان تخمـین بهینـه در نظر گرفته شود، تخمین خطی است که در آن

$$\hat{s}=\alpha(z)=\lambda z$$

محاسبه تخمین LMMSE بسیار ساده تر از MMSE است این در حالیـت که عملکرد تخمینگر هم چندان افتی نخواهد داشت.

Linear MMSE Estimation

در تخمین LMMSE هدف تعیین و محاسبه λ است.

یکی از روش های تعیین λ محاسبه مستقیم آن با استفاده از می نـیمم سازی MSE است. بطوریکه

$$\text{MSE}=E\left[(s-\lambda z)^2\right]=E\left[s^2-2\lambda sz+\lambda^2 z^2\right]$$

با گرفتن مشتق جزئی نسبت به λ داریم:

$$\frac{\partial \text{MSE}}{\partial\lambda}=-2E[sz]+2\lambda E\left[z^2\right]=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\lambda=\frac{E[sz]}{E\left[z^2\right]}}$$

و در نتیجه تخمین LMMSE عبارت خواهد بود از:

$$\boxed{\hat{s}_{LMMSE}=\left(\frac{E[sz]}{E\left[z^2\right]}\right)z \qquad (3.43)}$$

Linear MMSE Estimation

توجه به معادله (۳.۴۳) نشان می دهـد کـه محاسـبه تخمـین LMMSE نیازی به اطلاع از توابع چگالی احتمال ندارد، بلکه می توان از محاسبه و تخمین گشتاورهای مرتبه دوم $E[sz]$ و $E\left[z^2\right]$ استفاده نمود.

$$E[sz] \approx \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} s_m z_m$$

$$E\left[z^2\right] \approx \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} z_m^2$$

Linear MMSE Estimation

قضیه ۳.۵: (اصل تعامد در تخمین LMMSE)

اگر $\alpha(z)$ تخمین LMMSE از s باشد بـا اسـتفاده از مشـاهدات z، آنگـاه خطای تخمین $s-\alpha(z)$ بر تمامی توابع خطی $\gamma(z)$ عمود است.

$$E\left[\left(s-\alpha(z)\right)\gamma(z)\right]=0$$

اثبات:

$$E\left[\left(s-\alpha(z)\right)\gamma(z)\right]=E\left[\left(s-\frac{E[sz]}{E\left[z^2\right]}z\right)\beta z\right]=\beta E\left[sz-\frac{E[sz]}{E\left[z^2\right]}z^2\right]$$

$$=\beta E[sz]-\beta\frac{E[sz]}{E\left[z^2\right]}E\left[z^2\right]=\beta E[sz]-\beta E[sz]=0$$

Linear MMSE Estimation and Vector RVs

اگر $s_{m\times 1}$ و $z_{q\times 1}$ متغیرهای تصادفی برداری با توزیع مشـــترک باشـــند. در خصوص محاسبه تخمین **LMMSE** به فرم $\hat{s} = Mz$ می توان به صـــورت زیر عمل نمود:

$$\text{Let} \quad P = E\left[(s-\hat{s})(s-\hat{s})^T\right]$$

میانگین مربعات خطا را می توان با اســتفاده از تــابع $trace$ مــاتریس P توصیف نمود:

$$MSE = trace[P] = E\left[(s-\hat{s})^T(s-\hat{s})\right] = E\left[(s-Mz)^T(s-Mz)\right]$$

حال به منظور محاسبه ماتریس M میتوان از $trace[P]$ نسبت به ماتریس M مشتق گرفت.

Linear MMSE Estimation and Vector RVs

لذا:

$$\begin{aligned}
P &= E\left[(s-Mz)(s-Mz)^T\right] \\
&= E\left[ss^T\right] - E\left[sz^T\right]M^T - M.E\left[zs^T\right] + M.E\left[zz^T\right]M^T \\
\Rightarrow trace(P) &= trace\left(E\left[ss^T\right]\right) - trace\left(E\left[sz^T\right]M^T\right) \\
&\quad - trace\left(ME\left[zs^T\right]\right) + trace\left(M.E\left[zz^T\right]M^T\right)
\end{aligned}$$

از طرفی:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial trace\left(ABA^T\right)}{\partial A} = 2AB \\
\dfrac{\partial trace(AB)}{\partial A} = \dfrac{\partial trace\left(B^T A^T\right)}{\partial A} = B^T
\end{cases}$$

Linear MMSE Estimation and Vector RVs

در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{\partial trace(P)}{\partial M} = -2E\left[sz^T\right] + 2M.E\left[zz^T\right] = 0 \qquad (3.50)$$

$$\Rightarrow \boxed{M = E\left[sz^T\right]\left(E\left[zz^T\right]\right)^{-1}} \qquad (3.51)$$

$$\Rightarrow \hat{s} = E\left[sz^T\right]\left(E\left[zz^T\right]\right)^{-1} z \qquad (3.52)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial trace\left(ABA^T\right)}{\partial A} = 2AB \\ \dfrac{\partial trace\left(AB\right)}{\partial A} = \dfrac{\partial trace\left(B^T A^T\right)}{\partial A} = B^T \end{cases}$$

Linear MMSE Estimation

قضیه ۳.۶: (اصل تعامد در تخمین LMMSE و متغیرهای تصادفی برداری)

اگر $s_{m\times 1}$ و $z_{q\times 1}$ متغیرهای تصادفی با توزیع مشترک باشند و تخمین LMMSE از s با استفاده از مشاهدات z باشد، آنگاه خطای تخمین بر z عمود است.

$$E\left[\left(s-\hat{s}\right)z^T\right] = 0_{m\times q}$$

اثبات:

$$\begin{aligned} E\left[\left(s-\hat{s}\right)z^T\right] &= E\left[\left\{s - E\left[sz^T\right]\left(E\left[zz^T\right]\right)^{-1} z\right\} z^T\right] \\ &= E\left[sz^T\right] - E\left[E\left[sz^T\right]\left(E\left[zz^T\right]\right)^{-1} zz^T\right] \\ &= E\left[sz^T\right] - E\left[sz^T\right]\left(E\left[zz^T\right]\right)^{-1} E\left[zz^T\right] = 0 \end{aligned}$$

Linear MMSE Estimation

قضیه ۳.۷:

اگر $\alpha(z)$ یک تخمین خطی از s با استفاده از مشاهدات z باشد، آنگاه α مقدار MSE را می نیمم می نماید اگر و فقط اگر خطای تخمین $s-\alpha(z)$ بر مشاهدات z عمود باشد.

$$E\left[\left(s-\alpha(z)\right)z^T\right]=0_{m\times q}$$

توجه: با استفاده از این قضیه میتوان تخمینگر خطی نامتغیر بازمان MMSE را ساده تر طراحی نمود.

Linear MMSE Estimation

به عنوان مثال در حالت اسکار

$$E\left[\left(s-\lambda z\right)\beta z\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \beta E\left[sz\right]=\beta\lambda E\left[z^2\right] \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{E\left[sz\right]}{E\left[z^2\right]}$$

با فرض اینکه میانگین s و z برابر صفر باشند

$$\lambda=\frac{E\left[sz\right]-E\left[s\right]E\left[z\right]}{E\left[z^2\right]-\left(E\left[z\right]\right)^2}=\frac{Cov\left[s,z\right]}{\sigma_z^2}$$

با تعریف *Correlation Coefficient* به صورت:

$$\rho_{s,z}=\frac{Cov\left[s,z\right]}{\sqrt{\sigma_s^2\sigma_z^2}}$$

Linear MMSE Estimation

$$\lambda = \frac{E[sz]-E[s]E[z]}{E\left[z^2\right]-\left(E[z]\right)^2} = \frac{Cov[s,z]}{\sigma_z^2} = \rho_{s,z}\frac{\sigma_s}{\sigma_z}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{s}_{LMMSE} = \rho_{s,z}\frac{\sigma_s}{\sigma_z}z \qquad (3.55)$$

ضریب وزنی در رابطه (۳.۵۵) قصد دارد موازنه ای ما بین سیگنال و نویز برقرار نماید.

σ_s^2 معیاری از توان سیگنال در مشاهدات z را نشان می دهد، بنابراین بزرگ بودن وزن مشاهدات z را افزایش می دهد.

از طرفی σ_z^2 واریانس مشاهدات یا به عبارتی توان نویز را نشان می دهد که در صورتی که توان نویز بزرگ باشد مشاهدات z برای تعیین s قابل اعتماد نخواهند بود و ضریب وزنی کاهش می یابد.

Linear MMSE Estimation

معادله (۳.۵۵) نشان می دهد که اگر s و z دو متغیر تصادفی *uncorrelated* باشند و/یا به عبارت دیگر اگر سیگنال و مشاهدات از طریق گشتاورهای مرتبه دو مشابه و مرتبط نباشند آنگاه

$$\rho_{s,z} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \hat{s}_{LMMSE} = 0$$

Linear MMSE Estimation

تحلیل عملکرد تخمین LMMSE:

با فرض اینکه میانگین s و z برابر صفر باشند

$$E\left[s-\hat{s}_{LMMSE}\right]=E\left[s-\lambda z\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \text{unbiased estimation}$$

$$E\left[\left(s-\hat{s}_{LMMSE}\right)^2\right]=E\left[s^2\right]-2\frac{\sigma_s}{\sigma_z}\rho_{s,z}E\left[sz\right]+\frac{\sigma_s^2}{\sigma_z^2}\rho_{s,z}^2E\left[z^2\right]$$

$$=E\left[s^2\right]-2\frac{\sigma_s}{\sigma_z}\rho_{s,z}Cov(s,z)+\frac{\sigma_s^2}{\sigma_z^2}\rho_{s,z}^2\sigma_z^2=\sigma_s^2-2\frac{\sigma_s}{\sigma_z}\rho_{s,z}\left(\rho_{s,z}\sigma_s\sigma_z\right)+\frac{\sigma_s^2}{\sigma_z^2}\rho_{s,z}^2\sigma_z^2$$

$$=\sigma_s^2\left(1-\rho_{s,z}^2\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} If \quad \rho_{s,z}=0 \quad \Rightarrow \quad MSE \text{ will be maximaized} \\ If \quad \rho_{s,z}=\pm 1 \quad \Rightarrow \quad MSE=0 \quad \Rightarrow \quad z=\mu s \end{cases}$$

Linear MMSE Estimation

جمع بندی روش MMSE

تخمین MMSE به محاسبه امید ریاضی شرطی $E[s|z]$ بر می گردد و با توجه به مشکل بودن محاسبه آن مساله به یک مساله زیربهینه به نام تخمین LMMSE تبدیل گشت.

توجه: اگر s و z متغیرهای گوسی با توزیع مشترک باشند تخمین LMMSE همان تخمین بهینه MMSE خواهد بود.

مقایسه روشهای تخمین بهینه مطرح شده

روشهای تخمین ML و MAP به نظر مشابه می آیند ولیکن تفاوت های بسیاری ما بین آنها وجود دارد:

تخمینگر ML : با داشتن مشاهدات z، مقداری از s که احتمال بالاتری دارد که مشاهدات z را تولید می کنند.

$$\hat{s}_{ML} = \text{values of } s \text{ for which } \frac{\partial f_z(z \mid \mathbf{s}=s)}{\partial s} = 0 \qquad (3.9)$$

تخمینگر MAP : با داشتن مشاهدات z، مقداری از s که احتمال بالاتری برای رخ دادن دارد(شکلی از تخمین ***Bayesian***).

$$\hat{s}_{MAP} = \text{values of } s \text{ for which } \frac{\partial f_s(s \mid \mathbf{z}=z)}{\partial s} = 0 \qquad (3.16)$$

مقایسه روشهای تخمین بهینه مطرح شده

توجه: تخمین ML و MAP با تعداد کم نمونه ها ممکن است پاسخ بهتری از تخمین MMSE در اختیار قرار دهند ولیکن در تعداد زیاد تخمین MMSE مقدار MSE را کمتر خواهد نمود.

توجه: تخمین LMMSE عبارت است از مصالحه ای ما بین بهینه سازی کامل و ممکن بودن یافتن تخمین. این روش به محاسبه مقادیر با بیشترین احتمال (likely value) نیازی ندارد. بلکه جهت محاسبه این تخمین لازم است گشتاورهای مرتبه ۲از s و z وابسته است که در بسیاری از مسائل قابل محاسبه هستند و نیاز به وابستگی مستقیم مقدار تابع چگالی احتمال نیست. که این موجب ساده تر شدن استفاده از این تخمین در محاسه و کاربرد می گردد.

مقایسه روشهای تخمین بهینه مطرح شده

مثال ۳.۱۰: (تخمین MMSE و ML)

متغیر تصادفی مثال ۳.۲ را درنظر بگیرید.

$$f_{s,z}(s,z)=\begin{cases}\frac{1}{12}(s+z)e^{-z}, & 0\le s\le 4,\ 0\le z<\infty\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad f_z(z)=\int_0^4 f_{s,z}(s,z)ds=\frac{(z+2)}{3}e^{-z}\quad\Rightarrow\quad f_z(s\,|\,\mathbf{z}=z)=\frac{1}{4}\frac{s+z}{z+2},\quad 0\le s\le 4, 0\le z<\infty$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{MSE}(\hat{s}_{ML})=\int_0^\infty\int_0^4\left(s-\hat{s}_{ML}\right)f_{s,z}(s,z)dsdz$$

$$=\int_0^1\int_0^4\left(s-4\right)\frac{s+z}{12}e^{-z}dsdz+\int_1^\infty\int_0^4\left(s-0\right)\frac{s+z}{12}e^{-z}dsdz\simeq 4.8636$$

مقایسه روشهای تخمین بهینه مطرح شده

ادامه مثال ۳.۱۰: (تخمین MMSE و ML)

$$\hat{s}_{MMSE}=E\left[s\,|\,z\right]=\int_0^4 sf_s(s\,|\,z=z)ds=\frac{6z+16}{3z+6}$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{MSE}(\hat{s}_{MMSE})=\int_0^\infty\int_0^4\left(s-\hat{s}_{MMSE}\right)f_{s,z}(s,z)dsdz\simeq 1.1192$$

همانگونه که انتظار می رفت:

- **تخمین ML و MMSE دو مقدار متفاوت خواهند داشت.**
- **تخمین MMSE دارای مقدار MSE کوچتری نسبت به تخمین ML است.**

باسمه تعالی

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 4

فیلتر وینر

مقدمه

- فیلتر وینر یک فیلتر LTI است که در کنترل و پردازش سیگنال دارای کاربرد فراوان است. این فیلتر یک تخمین LMMSE از سیگنال ارائه می کند.

- فیلتر وینر دارای سه ساختار کلی و مهم است که عبارتند از:

  – **Finite Impulse Response (Wiener-Hopf Equation)**
  – **Infinite Impulse Response**
  – **Causal Wiener Filter**

فیلترهای LTI-MMSE :

- با فرض اینکه تخمینگر مد نظر ما یک تخمینگر LTI است(در این فصل به دنبال یافتن چنین تخمینگری هستیم)، لذا می توان این تخمینگر را با استفاده از توصیف کانولوشن به صورت زیر ارائه نمود:

$$\hat{s}(n) = h(n) * z(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)z(i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)z(n-i) \qquad (4.2)$$

که در آن $h(n)$ عبارت است از پاسخ ضربه تخمینگر که به آن فیلتر نیز می گویند.

- با فرض LTI بودن تخمینگر، این امکان بوجود می آید که از ابزارهای حوزه فرکانس (مانند تبدیل z و تبدیل فوریه) بتوان استفاده نمود.

فیلترهای LTI-MMSE :

- اگر H به صورت زیر تعریف شود

$$H = \{n:\ h(n) \neq 0\}$$

آنگاه رابطه (۴.۲) را به صورت زیر می توان بازنویسی نمود:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i \in H} h(i)z(n-i)$$

که با درنظر گرفتن $s(n)$ و $z(n)$ به صورت سیگنال های تصادفی با توزیع مشترک متغیر تصادفی $\hat{s}(n)$ به صورت زیر قابل بیان خواهد بود.

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \sum_{i \in H} h(i)\mathbf{z}(n-i) \qquad (4.4)$$

فیلترهای LTI-MMSE :

- هدف طراحی در اینجا تعیین پاسخ ضربه تخمینگر است، $h(n)$، بطوریکه MSE را می نیمم نماید.

$$MSE = E\left[\left(s(n)-\hat{s}(n)\right)^2\right]$$

لذا:

$$MSE = E\left[\left(s(n)-\sum_{i\in H} h(i)\mathbf{z}(n-i)\right)\left(s(n)-\sum_{j\in H} h(j)\mathbf{z}(n-j)\right)\right]$$

$$= E\left[s^2(n)\right]-2\sum_{i\in H} h(i)E\left[s(n)z(n-i)\right]+\sum_{i\in H}\sum_{j\in H} h(i)h(j)E\left[z(n-i)z(n-j)\right] \quad (4.6)$$

فیلترهای LTI-MMSE :

- با مشتق گیری از MSE نسبت به $h(i)$ و با فرض $h(i)\neq 0$ خواهیم داشت؟

$$\frac{\partial MSE}{\partial h(i)} = -2E\left[s(n)z(n-i)\right]+2\sum_{j\in H} h(j)E\left[z(n-i)z(n-j)\right]=0$$

درنتیجه:

$$\sum_{j\in H} h(j)E\left[z(n-i)z(n-j)\right]=E\left[s(n)z(n-i)\right] \qquad (4.7)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{j\in H} h(j)\underbrace{R_z(j-i)}_{Auto-Corr.} = \underbrace{R_{sz}(i)}_{Cross-Corr.}\ , \qquad i\in H \qquad (4.8)}$$

فیلترهای LTI-MMSE :

با توجه به اینکه معادله (۴.۸) مبنای ارائه فیلتر وینر است که منجر به یک فیلتر LTI و MMSE می گردد لذا، خواص مطرح شده در خصوص تخمینگر های LMMSE را خواهد داشت. در این خصوص نکات زیر قابل طرح هستند:

- فقط گشتاورهای مرتبه دوم جهت تعیین فیلتر LTI بهینه لازم هستند.
- معادله (۴.۶) یک معادله به فرم **quadratic** نسبت به $h(n)$ است که این امر نتایج زیر را به همراه خواهد داشت:
  - MSE دارای یک می نیمم منحصر به فرد است و در نتیجه فیلتر LTI و بهینه $h(n)$ یکتا است.
  - مقدار می نیمم با استفاده از $\frac{\partial MSE}{\partial h(i)} = 0$ قابل محاسبه است.

اصل تعامد برای فیلترهای LTI-MMSE :

معادله (۴.۷) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\sum_{j\in H} h(j)E\left[z(n-i)z(n-j)\right] = E\left[s(n)z(n-i)\right] \qquad (4.7)$$

$$\Rightarrow E\left[z(n-i)\left(s(n)-\underbrace{\sum_{j\in H} h(j)z(n-j)}_{\hat{s}(n)}\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow E\left[z(n-i)\left(s(n)-\hat{s}(n)\right)\right] = E\left[z(n-i)\tilde{s}(n)\right] = 0 \qquad (4.9)$$

- که این معادله نشانگر ارضا شدن اصل تعامد است برای تخمینگر های LTI-MMSE.
- با تعریف $Z = \{z(n-i), i\in H\}$ رابطه (۴.۹) نشان می دهد که خطای تخمین بر مشاهدات مجموعه Z عمود است.

اصل تعامد برای فیلترهای LTI-MMSE :

قضیه ۴.۱: اگر $\hat{s}(n)=h(n)*z(n)$ یک تخمین بهینه LTI باشد که $h(n)$ روی H تعریف شده است و با فرض اینکه $g(n)$ پاسخ ضربه یک فیلتر LTI است که روی زیر مجموعه ای از H تعریف می شود. آنگاه خطای تخمین بر خروجی $g(n)*z(n)$ عمود خواهد بود.

$$E\left[\left(s(n)-\hat{s}(n)\right)g(n)*z(n)\right]=0$$

قضیه ۴.۲: اگر $h(n)$ پاسخ ضربه یک فیلتر LTI بر روی مجموعه H باشد و همچنین اگر G مجموعه ای از تمامی فیلترهای LTI بر روی H باشد. آنگاه در میان تمامی فیلترهای G ، $\hat{s}(n)=h(n)*z(n)$ یک تخمین MMSE است اگر و فقط اگر خطای تخمین بر $g(n)*z(n)$ عمود باشد که $g(n)$ پاسخ ضربه هر یک از فیلترهای تعریف شده در G است.

$$E\left[\left(s(n)-h(n)*z(n)\right)g(n)*z(n)\right]=0$$

اصل تعامد برای فیلترهای LTI-MMSE :

با توجه به قضیه (۴.۲)

$$g(n)=\delta(n-i) \quad \Rightarrow \quad g(n)*z(n)=z(n-i)$$

$$\boxed{\hat{s}(n)=h(n)*z(n) \text{ is } MMSE \text{ estimation } \Leftrightarrow E\left[\left(s(n)-h(n)*z(n)\right)z(n-i)\right]=0}$$

The FIR Wiener filter

با توجه به آنچه تا کنون ارائه شد مساله یافتن تخمینگر **LTI-MMSE** آماده ارائه است.

برای تمامی فیلترهای وینر که در ادامه ارائه می گردد فرض بر این است که $s(n)$ ، $v(n)$ و $z(n)$ متغیرهای تصادفی $JWSS$ با میانگین صفر هستند. لذا:

$$E\left[z(i)z(j)\right]=R_z(j-i)=R_z(k)$$
$$E\left[s(i)z(j)\right]=R_{sz}(j-i)=R_{sz}(k)$$

The FIR Wiener filter

استخراج معادلات فیلتر وینر:

- با فرض اینکه فیلتر مد نظر دارای پاسخ ضربه ای به صورت $h(n)$ روی مجموعه $H=\{0,1,2,\ldots,N-1\}$ باشد. آنگاه پاسخ ضربه در یک بازه زمانی محدود موجود است که به این نوع فیلتر، فیلتر **FIR** گویند.

- در ارائه یک فیلتر **FIR** و *causal*، در بازه زمانی N، به N، طول فیلتر گفته می شود و *N-1* را مرتبه فیلتر گویند.

- به منظور استخراج معادلات فیلتر وینر از معادله **Wiener-Hopf** استفاده می شود و به دنبال محاسبه تکرار جزئیات نیستیم.

The FIR Wiener filter

بنابراین

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) z(n-i) \qquad (4.13)$$

$$MSE = E\left[\left(s(n) - \hat{s}(n)\right)^2\right] \qquad (4.14)$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(j) R_z(j-i) = R_{sz}(i), \qquad 0 \le i \le N-1 \qquad (4.15)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} R_z(0) & R_z(1) & \cdots & R_z(N-1) \\ R_z(1) & R_z(0) & \cdots & R_z(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_z(N-1) & R_z(N-2) & \cdots & R_z(0) \end{bmatrix}}_{R_z} \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix}}_{h} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{sz}(0) \\ R_{sz}(1) \\ \vdots \\ R_{sz}(N-1) \end{bmatrix}}_{r_{sz}} \qquad (4.16)$$

توجه داشته باشید که در نوشتن معادله (۴.۱۶) از $R_z(k) = R_z(-k)$ استفاده شده است.

The FIR Wiener filter

در نتیجه

$$(4.16) \quad \to \quad R_z h = r_{sz} \qquad (4.17)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad h = R_z^{-1} r_{sz} \qquad (4.18)}$$

$$\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_z(0) & R_z(1) & \cdots & R_z(N-1) \\ R_z(1) & R_z(0) & \cdots & R_z(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_z(N-1) & R_z(N-2) & \cdots & R_z(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{sz}(0) \\ R_{sz}(1) \\ \vdots \\ R_{sz}(N-1) \end{bmatrix} \qquad (4.19)$$

توجه: ماتریس R_z دارای یک فرم خاص است که با عنوان ماتریس **Toeplitz** شناخته می شود لذا جهت محاسبه رابطه (۴.۱۹) از روش برگشتی به نام **Levinson-Durbin** می توان استفاده نمود.

The FIR Wiener filter

محاسبه MSE:

$$MSE = E\left[\tilde{s}(n)\left(s(n)-\sum_{i=0}^{N-1}h(i)z(n-i)\right)\right] = E\left[\tilde{s}(n)s(n)\right]-\sum_{i=0}^{N-1}h(i)\,\cancel{E\left[\tilde{s}(n)z(n-i)\right]}$$

$$= E\left[\tilde{s}(n)s(n)\right] = E\left[s^2(n)\right]-\sum_{i=0}^{N-1}h(i)E\left[s(n)z(n-i)\right]$$

$$= R_s(0)-\sum_{i=0}^{N-1}h(i)R_{sz}(i) \qquad (4.21)$$

$$MSE_{filter} = R_s(0)-h^T r_{sz} \qquad (4.22)$$

The FIR Wiener filter

اگر $\hat{s}(n)=z(n)$ در نظر گرفته می شد آنگاه:

$$MSE_{no-filter} = E\left[\left(s(n)-z(n)\right)^2\right] = R_s(0)-2R_{s,z}(0)+R_z(0) \qquad (2.23)$$

بر این اساس به منظور ارزیابی تاثیر فیلتر وینر شاخصی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\text{reduction in } MSE = 10\log_{10}\left(\frac{MSE_{no-filter}}{MSE_{filter}}\right)\ \text{dB} \qquad (2.24)$$

توجه: از معیار MSE به منظور ارزیابی عملکرد فیلتر می توان سود جست. توجه داشته باشید که بالا بردن مرتبه فیلتر می تواند موجب کاهش MSE گردد ولیکن در فیلتر FIR این امر تاثیر چندانی ممکن است نداشته باشد.

The FIR Wiener filter

اندازه گیری با حضور نویز جمع شونده:

اگر مشخص باشد که نویز به صورت جمع شونده قابل مدل شدن است آنگاه امکان جایگزینی $R_z(k)$ و $R_{sz}(k)$ با معادلات ساده تر وجود خواهد داشت:

$z(n) = s(n) + v(n)$

$s(n), v(n):$ uncorrelated, zero mean & JWSS

در نتیجه

$$R_z(k) = E\left[z(n)z(n-k)\right] = E\left[\left(s(n)+v(n)\right)\left(s(n-k)+v(n-k)\right)\right]$$
$$= E\left[s(n)s(n-k)\right] + E\left[v(n)v(n-k)\right] = R_s(k) + R_v(k) \qquad (4.25)$$

$$R_{sz}(k) = E\left[s(n)z(n-k)\right] = E\left[s(n)\left(s(n-k)+v(n-k)\right)\right]$$
$$= E\left[s(n)s(n-k)\right] + E\left[s(n)v(n-k)\right] = R_s(k) \qquad (4.26)$$

The FIR Wiener filter

لذا ضرایب فیلتر با حضور نویز جمع شونده عبارتند از:

$$h = \left(R_s + R_v\right)^{-1} r_s$$

که

$$R_s = \begin{bmatrix} R_s(0) & R_s(1) & \cdots & R_s(N-1) \\ R_s(1) & R_s(0) & \cdots & R_s(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_s(N-1) & R_s(N-2) & \cdots & R_s(0) \end{bmatrix} \qquad R_v = \begin{bmatrix} R_v(0) & R_v(1) & \cdots & R_v(N-1) \\ R_v(1) & R_v(0) & \cdots & R_v(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_v(N-1) & R_v(N-2) & \cdots & R_v(0) \end{bmatrix}$$

$$r_s = \begin{bmatrix} R_s(0) \\ R_s(1) \\ \vdots \\ R_s(N-1) \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix}$$

The FIR Wiener filter

مثال (۴.۲):

signal $s(n)$, $R_s(k) = 0.95^{|k|}$

Additive noise $v(n)$, $\sigma_v^2 = 2 \rightarrow R_v(k) = 2\delta(k)$

$s(n), v(n)$: uncorrelated, zero mean & JWSS

یک فیلتر بهینه خطی از مرتبه ۲ ارائه نمایید.

$N - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{N = 3}$

$$\begin{cases} R_z(k) = R_s(k) + R_v(k) = 0.95^{|k|} + 2\delta(k) \\ R_{sz}(k) = R_s(k) = 0.95^{|k|} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} R_z(0) & R_z(1) & R_z(2) \\ R_z(1) & R_z(0) & R_z(1) \\ R_z(2) & R_z(1) & R_z(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sz}(0) \\ R_{sz}(1) \\ R_{sz}(2) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0.95 & 0.9025 \\ 0.95 & 3 & 0.95 \\ 0.9025 & 0.95 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.95 \\ 0.9025 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad h = \begin{bmatrix} 0.2203 & 0.1919 & 0.1738 \end{bmatrix}$$

The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۲):

$MSE_{filter} = R_s(0) - h^T r_{sz} = 0.4406$

از طرفی

$MSE_{no-filter} = 2$

$\Rightarrow$ reduction in $MSE = 6.56$ $^{(dB)}$

The FIR Wiener filter

پیش بینی سیگنال با استفاده از فیلتر وینر FIR :

یکی از اجزا تخمین، پیش بینی سیگنال است که تخمین با یک گام پیش بینی را بر اساس فیلتر وینر FIR می توان به صورت زیر فرموله نمود:

$$\hat{s}(n+1)=\sum_{i=0}^{N-1}h(i)z(n-i) \qquad (4.31)$$

$$MSE=E\left[\left(s(n+1)-\hat{s}(n+1)\right)^2\right] \qquad (4.32)$$

مقایسه معادلات فوق با معادلات (۴.۱۳) و (۴.۱۴) نشان می دهد که فقط شاخص زمانی از n به *n+1* تغییر کرده است. لذا می توان معادلات حاصل جهت محاسبه پارامترهای *h* را بطور مشابه بازنویسی نمود.

The FIR Wiener filter

ضرایب *h* در پیش بینی سیگنال با استفاده از فیلتر وینر FIR :

$$\begin{bmatrix} R_z(0) & R_z(1) & \cdots & R_z(N-1) \\ R_z(1) & R_z(0) & \cdots & R_z(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_z(N-1) & R_z(N-2) & \cdots & R_z(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(N-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_{sz}(1) \\ R_{sz}(2) \\ \vdots \\ R_{sz}(N) \end{bmatrix} \qquad (4.34)$$

در نتیجه *MSE* عبارت خواهد بود از:

$$MSE=R_s(0)-\sum_{i=0}^{N-1}h(i)R_{sz}(i+1) \qquad (4.35)$$

The FIR Wiener filter

مثال (۴.۳): پیش بینی در حضور نویز رزونانسی

هدف طراحی یک فیلتر مرتبه ۳ با یک مرحله پیش بینی است. در حالیکه سیگنال آکوستیک s در یک محیط بسته در حال اندازه گیری است.

The signal is generated via $\boxed{s(n) = 0.4s(n-1) + \omega(n)}$

$\omega(n)$: white noise with *zero mean* and *unit variance*

با توجه به رزونانس در محیط بسته نویز اندازه گیری به صورت زیر قابل مدلسازی است. در این مدل x مدلی از رزونانس ناشی از محیط بسته است، d عبارت است از نویز سفید با میانگین صفر و واریانس ۱ که نویز میکروفن را مدل می نماید.

$$\begin{cases} x(n) = 0.5x(n-1) + 0.3s(n) \\ v(n) = x(n) + d(n) \end{cases}$$

The FIR Wiener filter

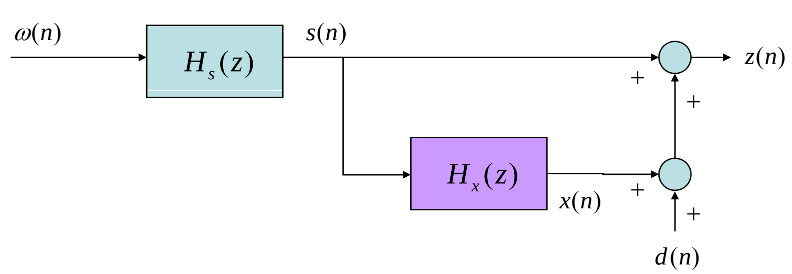
ادامه مثال (۴.۳):

$d(n), \omega(n)$ are uncorrelated

all processes are JWSS

در حالیکه s و v دارای *correlation* هستند به دلیل وجود رزونانس.

با توجه به روابط فوق کل فرایند را می توان به صورت زیر مدل نمود:



The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۳):

با توجه به رابطه (۴.۳۴) به منظور محاسبه پارامترهای **h** لازم است $R_z(k)$ و $R_{sz}(k)$ محاسبه گردد.

$$R_z(k) = E\left[z(n)z(n-k)\right] = E\left[\left(s(n)+v(n)\right)\left(s(n-k)+v(n-k)\right)\right]$$
$$= E\left[\left(s(n)+0.5x(n-1)+0.3s(n-1)+d(n)\right)\left(s(n-k)+0.5x(n-k-1)+0.3s(n-k-1)+d(n-k)\right)\right]$$
$$= R_s(k)+0.5R_{sx}(k+1)+0.3R_s(k+1)+0.5R_{xs}(k-1)+0.25R_x(k)+0.15R_{sx}(k)+0.3R_s(k-1)$$
$$+0.15R_{sx}(k)+0.09R_s(k)$$
$$= 0.3R_s(k+1)+1.09R_s(k)+0.3R_s(k-1)$$
$$+0.5R_{sx}(k+1)+0.15R_{sx}(k)+0.5R_{xs}(k-1)$$
$$+0.25R_x(k)+0.15R_{xs}(k)$$

The FIR Wiener filter

ارتباط **PSD** با تبدیل **z** یک طرفه و دو طرفه

$$S_{XX}(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m} = \sum_{m=-\infty}^{-1} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m} + \sum_{m=0}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} R_{XX}[-k]e^{j\Omega k} + \sum_{m=0}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} R_{XX}[-k]e^{j\Omega k} + \sum_{m=1}^{\infty} R_{XX}[m]e^{-j\Omega m} + R_{XX}[0]$$

$$\begin{aligned} r_{xx}[0] &\geq |r_{xx}[k]| \\ r_{xx}[-k] &= r_{xx}[k] \\ r_{xy}[-k] &= r_{yx}[k]. \end{aligned}$$

The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۳):

در نتیجه لازم است ترم های $R_s(k)$، $R_x(k)$ و $R_z(k)$ محاسبه گردند.

محاسبه $R_s(k)$:

$$\left.\begin{array}{l}(2.89)\rightarrow S_s(z)=H_s(z)H_s(z^{-1})S_\omega(z)\\ H_s(z)=\dfrac{1}{1-0.4z^{-1}}\\ S_\omega(z)=1\end{array}\right\}\Rightarrow S_s(z)=\frac{1}{1-0.4z^{-1}}\frac{1}{1-0.4z}=\frac{25}{21}\frac{z}{z-0.4}-\frac{25}{21}\frac{z}{z-2.5}$$

$$\rightarrow \boxed{R_s(k)=\frac{25}{21}(0.4)^{|k|}}$$

محاسبه $R_x(k)$:

$$\left.\begin{array}{l}(2.89)\rightarrow S_x(z)=H_x(z)H_x(z^{-1})S_s(z)\\ H_x(z)=\dfrac{0.3z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\end{array}\right\}\Rightarrow S_x(z)=\frac{0.3z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\frac{0.3z}{1-0.5z}\frac{1}{1-0.4z^{-1}}\frac{1}{1-0.4z}$$

$$\rightarrow \boxed{R_x(k)=\frac{1}{7}\left[\frac{25}{3}(0.5)^{|k|}-\frac{125}{21}(0.4)^{|k|}\right]}$$

The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۳):

محاسبه $R_{sx}(k)$:

$$\left.\begin{array}{l}(2.90)\rightarrow S_{sx}(z)=H_x(z^{-1})S_s(z)\\ H_x(z)=\dfrac{0.3z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{ss}(z)=\frac{0.3z}{1-0.5z}\frac{1}{1-0.4z^{-1}}\frac{1}{1-0.4z}$$

$$\rightarrow \boxed{R_{sx}(k)=\frac{5}{7}\left[\frac{25}{4}2^k\left(-k-1\right)-\frac{125}{84}\left[2(0.4)^{|k+1|}-(0.4)^{|k|}\right]\right]}$$

از طرفی $R_{xs}(k)=R_{sx}(-k)$ است. از طرفی:

$$R_{sz}(k)=E\left[s(n)z(n-k)\right]=E\left[s(n)\left(s(n-k)+0.5x(n-k-1)+0.3s(n-k-1)+d(n-k)\right)\right]$$
$$=0.3R_s(k+1)+R_s(k)+0.5R_{sx}(k+1)$$

لذا با توجه به محاسبات انجام گرفته در بالا مساله آماده محاسبه پارامترهای h است.

The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۳):

برای یک تخمینگر (پیش بینی کننده) مرتبه ۳:

$$\begin{bmatrix} 2.8172 & 1.2129 & 0.7567 & 0.4385 \\ 1.2129 & 2.8172 & 1.2129 & 0.7567 \\ 0.7567 & 1.2129 & 2.8172 & 1.2129 \\ 0.4385 & 0.7567 & 1.2129 & 2.8172 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ h(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5503 \\ 0.2201 \\ 0.0881 \\ 0.0352 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & h(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2010 & 0.0029 & -0.0191 & -0.0113 \end{bmatrix}$$

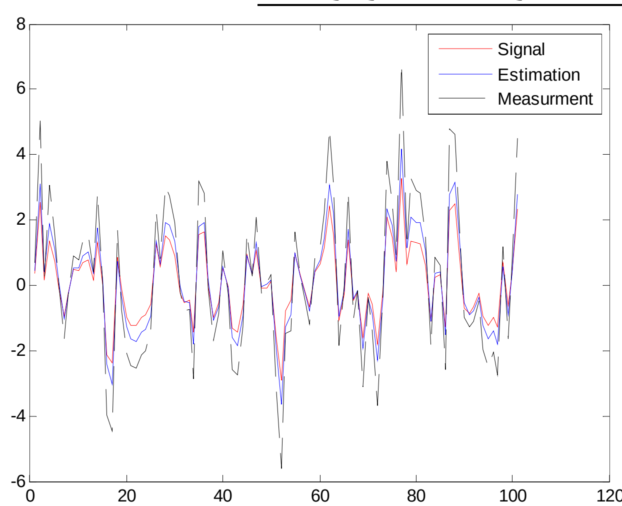
که مقدار MSE برای این فیلتر عبارت است از:

$$MSE = 1.0813$$

The FIR Wiener filter

ادامه مثال (۴.۳):

تخمین سیگنال در حالت فیلترینگ با فیلتر مرتبه ۳:



The FIR Wiener filter

مثال (۴.۳): pure prediction

با فرض اینکه هیچگونه نویزی در مشاهدات وجود ندارد، لذا:

$$R_z(k) = R_{sz}(k) = R_s(k) = 0.5\delta(k) + 0.9^{|k|}\cos(\frac{\pi k}{8})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1.5 & 0.8315 & 0.5728 \\ 0.8315 & 1.5 & 0.8315 \\ 0.5728 & 0.8315 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8315 \\ 0.5728 \\ 0.2790 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & h(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5045 & 0.1528 & -0.0914 \end{bmatrix}$$

The Non-causal Wiener filter

اگر در طراحی فیلتر، پاسخ ضربه فیلتر $h(n)$ روی مجموعه نامحدود H تعریف شود، به آن فیلتر Infinite Impulse Response (IIR) گفته می شود.
مجموعه های نامحدود زیادی وجود دارند ولیکن در اینجا و با هدف معرفی فیلترهای IIR، مجموعه H برابر مجموعه اعداد صحیح در نظر گرفته می شود (H=Z).

- **مشخصا چنین فیلتر عبارت خواهد بود از Non-causal IIR Wiener filter که معمولا با عنوان *<u>Non-causal Wiener filter</u>* شناخته می شود.**
- **مطمئنا چنین فیلتری کاربرد به هنگام (online) ندارد ولیکن در کاربردهای off-line که حجم مشاهدات زیادی وجود دارد بسیار قابل به کارگیری خواهد بود.**

<u>توجه:</u> Non-causal Wiener filter بهترین تخمین ممکن با استفاده از یک فیلتر LTI را در اختیار می گذارد.

The Non-causal Wiener filter

استخراج معادلات :

با توجه به اینکه به دنبال ارائه یک تخمینگر **LTI** هستیم

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)z(n-i)$$

لذا رابطه **Wiener-Hopf** عبارت خواهد بود از

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)R_z(j-i) = R_{sz}(i) \qquad i \in \mathbb{Z} \qquad (4.41)$$

رابطه (۴.۴۱) یک سیستم از بعد بی نهایت را توصیف می نماید لذا نمی توان آن را به صورت ماتریسی و مشابه فیلتر **FIR** حل نمود.

The Non-causal Wiener filter

استخراج معادلات :

ولیکن با توجه به فرض صفر بودن میانگین و **JWSS** بودن، امکان گرفتن تبدیل **Z** از این رابطه وجود دارد و در نتیجه

$$(4.41) \xrightarrow{z-trans.} S_{sz}(z) = S_z(z)H(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{S_{sz}(z)}{S_z(z)} \qquad (4.42)$$

واضح است که اگر $S_z(z)$ دارای صفری روی دایره واحد یا خارج از آن باشد موجب ناپایداری $H(z)$ می گردد.

The Non-causal Wiener filter

محاسبه MSE:

مشابه قیلتر FIR و رابطه (۴.۲۱) میتوان نشان داد که MSE برای Non-causal Wiener Filter به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$MSE = R_s(0) - \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) R_{sz}(i) \qquad (4.43)$$

اگر امکان محاسبه $h(i)$ با استفاده از تبدیل z معکوس $H(z)$ وجود داشته باشد، MSE را میتوان از رابطه (۴.۴۳) استفاده نمود ولیکن در بسیاری از مواقع این محاسبه بسیار پیچیده می شود. لذا لازم است روش دیگری پیشنهاد گردد.

The Non-causal Wiener filter

ادامه محاسبه MSE:

با توجه به قضیه مانده ها می توان رابطه MSE را با استفاده از رابطه زیر نیز محاسبه نمود:

$$MSE = \begin{cases} \dfrac{1}{j2\pi} \oint_C \left[S_s(z) - H(z) S_{sz}(z^{-1}) \right] z^{-1} dz & S_{sz}(z) \text{ rational} \\ \dfrac{1}{j2\pi} \oint_C \left[S_s(z) - H(z) S_{sz}^*(z) \right] z^{-1} dz & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (4.47)$$

$h(i)$

توجه: این رابطه را می توان برای محاسبه MSE در هر نوع فیلتر وینری استفاده نمود.

The Non-causal Wiener filter

مثال: MSE در حضور نویز جمع شونده

$$(4.25) \rightarrow S_z(z) = S_S(z) + S_v(z)$$
$$(4.26) \rightarrow S_{sz}(z) = S_s(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{S_{sz}(z)}{S_z(z)}$$

$$\xrightarrow{(4.47)} MSE = \frac{1}{j2\pi}\oint_C \left[S_s(z) - \frac{S_{sz}(z)}{S_z(z)} S_{sz}(z^{-1}) \right] z^{-1}dz = \frac{1}{j2\pi}\oint_C S_s(z)\left[1 - \frac{S_{sz}(z)}{S_z(z)}\right] z^{-1}dz$$
$$= \frac{1}{j2\pi}\oint_C S_s(z)\left[\frac{S_v(z)}{S_z(z)}\right] z^{-1}dz = \frac{1}{j2\pi}\oint_C S_v(z)H(z)z^{-1}dz$$

The Non-causal Wiener filter

مثال(۴.۵): مقایسه فیلتر وینر FIR و Non-Causal

مجددا مثال ۴.۲ را در نظر بگیرید، با توجه به محاسبات انجام گرفته:

$$R_z(k) = 0.95^{|k|} + 2\delta(k)$$
$$R_{sz}(z) = 0.95^{|k|}$$

در نتیجه با گرفتن تبدیل z:

$$S_z(z) = \frac{1-0.95^2}{(1-0.95z^{-1})(1-0.95z)} + 2 = 2.3955\frac{\left(1-0.7931z^{-1}\right)\left(1-0.7931z\right)}{(1-0.95z^{-1})(1-0.95z)}$$
$$S_{sz}(z) = \frac{1-0.95^2}{(1-0.95z^{-1})(1-0.95z)}$$

The Non-causal Wiener filter

ادامه مثال(۴.۵): مقایسه فیلتر وینر FIR و Non-Causal

$$R_z(k) = 0.95^{|k|} + 2\delta(k)$$
$$R_{sz}(z) = 0.95^{|k|}$$

در نتیجه با گرفتن تبدیل z:

$$H(z) = \frac{S_{sz}(z)}{S_z(z)} = \frac{0.0975}{2.3955\left(1-0.7931z^{-1}\right)\left(1-0.7931z\right)}$$
$$= 0.1097\frac{1-\left(0.7931\right)^2}{\left(1-0.7931z^{-1}\right)\left(1-0.7931z\right)} \rightarrow h(n) = 0.1097\left(0.7931\right)^{|n|}$$

The Non-causal Wiener filter

ادامه مثال(۴.۵): مقایسه فیلتر وینر FIR و Non-Causal

$$MSE = (0.95)^0 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.1097(0.7931)^{|n|}(0.95)^{|n|}$$
$$= 1-0.1097\left[\sum_{n=0}^{\infty}(0.7931)^n(0.95)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty}(0.7931)^{-n}(0.95)^{-n}\right]$$
$$= 1-0.1097\left[2\sum_{n=0}^{\infty}(0.7931)^n(0.95)^n - 1\right]$$
$$= 0.2195$$

لذا:

$$\text{reduction in MSE} = 10\log\left(\frac{MSE_{no-filter}}{MSE_{NC\_wiener}}\right) = 10\log(\frac{2}{0.2195}) = 9.5960^{dB}$$

The Non-causal Wiener filter

ادامه مثال(۴.۵): مقایسه فیلتر وینر FIR و Non-Causal

همچنین:

$$\text{reduction in MSE}=10\log\left(\frac{MSE_{FIR\_wiener-filter}}{MSE_{NC\_wiener}}\right)=10\log(\frac{0.4405}{0.2195})=3.0251^{dB}$$

توجه: لازم است انتظار داشته باشیم که **Non-causal Wiener Filter** بهترین تخمین ممکن را در میان فیلترهای **LTI** در اختیار گذارد.

The Causal Wiener filter

نبود اطلاعات کافی در مسائل عملی موجب می گردد استفاده از تخمینگر **Non-causal Wiener Filter** غیرممکن باشد، لذا فرمولاسیون جدیدی برای حل یافتن یک فیلتر **LTI** و **Causal** مورد نیاز است. بنابراین:

$$\hat{s}(n)=\sum_{i=0}^{\infty}h(i)z(n-i) \qquad (4.50)$$

در نتیجه معادله **Wiener-Hopf** به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\sum_{j=0}^{\infty}h(j)R_z(j-i)=R_{sz}(i) \qquad i\in\mathbb{N} \qquad (4.51)$$

که بر خلاف معادله (۴.۴۱) از آن نمی توان به صورت یک کانولوشن ساده یاد کرد و در نتیجه امکان استفاده از تکنیک طراحی تخمینگر غیرعلی وجود ندارد.

The Causal Wiener filter

نبود اطلاعات کافی در مسائل عملی موجب می گردد استفاده از تخمینگر **Non-causal Wiener Filter** غیرممکن باشد، لذا فرمولاسیون جدیدی برای حل یافتن یک فیلتر **LTI** و **Causal** مورد نیاز است. بنابراین:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) z(n-i) \qquad (4.50)$$

در نتیجه معادله **Wiener-Hopf** به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(j) R_z(j-i) = R_{sz}(i) \qquad i \in \mathbb{N} \qquad (4.51)$$

که بر خلاف معادله (۴.۴۱) از آن نمی توان به صورت یک کانولوشن ساده یاد کرد و در نتیجه امکان استفاده از تکنیک طراحی تخمینگر غیرعلی وجود ندارد.

The Causal Wiener filter

پیش از اینکه تکنیکی برای طراحی فیلتر علی پیشنهاد گردد لازم است دو مطلب مهم ارائه گردد که عبارتند از:

- **Spectral factorization theorem**
- **Causal-part Extraction: The plus operation**

The Causal Wiener filter

Spectral factorization theorem:

اگر $x(n)$ یک فرایند تصادفی، با مقدار حقیقی، با میانگین صفر و **WSS** با تابع چگالی طیفی آن یک تابع گویا به صورت $S_x(z)$ باشد. آنگاه این تابع را به صورت زیر می توان تجزیه نمود:

$$S(z) = S_x^+(z) S_x^-(z) \qquad (4.52)$$

که،

- $S_x^+(z)$ و $S_x^-(z)$ دو تابع گویا از **z** هستند.
- اگر p_i ها قطب های $S_x^+(z)$ باشند، آنگاه $|p_i| < 1$
- اگر z_i ها صفر های $S_x^+(z)$ باشند، آنگاه $|z_i| < 1$
- اگر p_i ها قطب های $S_x^-(z)$ باشند، آنگاه $|p_i| \geq 1$
- اگر z_i ها صفر های $S_x^-(z)$ باشند، آنگاه $|z_i| \geq 1$
- $S_x^+(z) = S_x^-(z^{-1})$

The Causal Wiener filter

Spectral factorization theorem:

اگر $x(n)$ یک فرایند تصادفی، با مقدار حقیقی، با میانگین صفر و **WSS** با تابع چگالی طیفی آن یک تابع گویا به صورت $S_x(z)$ باشد. آنگاه این تابع را به صورت زیر می توان تجزیه نمود:

$$S(z) = S_x^+(z) S_x^-(z) \qquad (4.52)$$

که،

- $S_x^+(z)$ و $S_x^-(z)$ دو تابع گویا از **z** هستند.
- اگر p_i ها قطب های $S_x^+(z)$ باشند، آنگاه $|p_i| < 1$
- اگر z_i ها صفر های $S_x^+(z)$ باشند، آنگاه $|z_i| < 1$
- اگر p_i ها قطب های $S_x^-(z)$ باشند، آنگاه $|p_i| \geq 1$
- اگر z_i ها صفر های $S_x^-(z)$ باشند، آنگاه $|z_i| \geq 1$
- $S_x^+(z) = S_x^-(z^{-1})$

The Causal Wiener filter

مثال(۴.۷): تجزیه تابع چگالی طیفی

اگر $s(n)$ یک فرآیند تصادفی قابل توصیف با معادله تفاضلی زیر باشد:

$$s(n) = 1.1s(n-1) - 0.24s(n-2) + 2\omega(n) + 3\omega(n-1)$$

$$\omega(n): \begin{cases} \text{zero mean, WSS} \\ R_\omega(n) = 5(0.6)^n \end{cases}$$

آنگاه:

$$S(z) = 1.1z^{-1}S(z) - 0.24z^{-2}S(z) + 2W(z) + 3z^{-1}W(z)$$

$$\Rightarrow \quad H_s(z) = \frac{S(z)}{W(z)} = \frac{2+3z^{-1}}{1-1.1z^{-1}+0.24z^{-2}} = \frac{2(1+1.5z^{-1})}{(1-0.3z^{-1})(1-0.8z^{-1})}$$

The Causal Wiener filter

ادامه مثال(۴.۷): تجزیه تابع چگالی طیفی

از طرفی

$$S_\omega(z) = 5\frac{0.64}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$$

لذا

$$\Rightarrow \quad S_z(z) = H_s(z)H_s(z^{-1})S_\omega(z)$$

$$\Rightarrow S_z(z) = \frac{2(1+1.5z^{-1})}{(1-0.3z^{-1})(1-0.8z^{-1})}\frac{2(1+1.5z)}{(1-0.3z)(1-0.8z)}\frac{3.2}{(1-0.6z^{-1})(1-0.6z)}$$

$$\Rightarrow \quad S_s^+(z) = \frac{2(1+1.5z)\sqrt{3.2}}{(1-0.3z^{-1})(1-0.8z^{-1})(1-0.6z^{-1})}$$

The Causal Wiener filter

The Causal-Part Extraction: The plus operation

یکی از اپراتورهای مورد نیاز در جداسازی بخش علی، **plus-operator** است.
اگر $h(n)$ یک سیستم **LTI** حقیقی با تابع تبدیل گویای گسسته به صورت $H(z)$ باشد. در حوزه زمان می توان $h(n)$ را به صورت دو بخش علی و غیرعلی تقسیم نمود.

$h(n) =$ causal part of $h(n)$ + anticausal part of $h(n)$

$$\text{causal part of } h(n) \triangleq [h(n)]_+ = h(n)1(n)$$

$$\text{anticausal part of } h(n) \triangleq [h(n)]_- = h(n)1(-n-1)$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = [H(z)]_+ + [H(z)]_-$$

The Causal Wiener filter

The Causal-Part Extraction: The plus operation

که

$[H(z)]_+ = Z\{h(n)1(n)\}$: *plus operator* or *causal – part extraction*

$[H(z)]_- = Z\{h(n)1(-n-1)\}$: minus *operator*

استخراج بخش Causal برای تابع گویا $H(z)$

$$H(z) = \frac{\sum_{n=1}^{L}\beta_{-n}z^{n} + \sum_{n=1}^{M}\beta_n z^{-n}}{\sum_{n=1}^{N} a_n z^{-n}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{L} c_{-n}z^{n}}_{\substack{P_A(z)\\ \downarrow \\ Anti-Causal}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{M-N} c_n z^{-n}}_{\substack{P_C(z)\\ \downarrow \\ Causal}} + \underbrace{\frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}}{\sum_{n=1}^{N} a_n z^{-n}}}_{\substack{Q(z)\\ \downarrow \\ \text{Proper}}} \quad (4.60)$$

The Causal Wiener filter

The Causal-Part Extraction: The plus operation

$Q(z)$ دارای ماکزیمم N-1 صفر و N قطب است. اگر فرض کنیم این تابع داری K قطب مجزا باشد (که $K \le N$) آنگاه می توان آن را به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$Q(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}}{\sum_{n=1}^{N} a_n z^{-n}} = \left(\frac{1}{a_0}\right) \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}}{\prod_{k=1}^{K} (1 - p_k z^{-1})^{m_k}} \qquad \begin{cases} p_k : \text{pole position} \\ m_k : \text{pole degrees} \end{cases}$$

با گسترش به کسرهای جزئی:

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=1}^{m_k} \frac{q_{k,m}}{\left(1 - p_k z^{-1}\right)^m} = \sum_{k=1}^{K} Q_k(z)$$

The Causal Wiener filter

The Causal-Part Extraction: The plus operation

که $Q_k(z)$ نشان دهنده اثر قطب kام را نشان می دهد.

$$Q_k(z) = \sum_{m=1}^{m_k} \frac{q_{k,m}}{\left(1 - p_k z^{-1}\right)^m} = \underbrace{\frac{q_{k,1}}{\left(1 - p_k z^{-1}\right)}}_{Q'_k(z)} + \sum_{m=2}^{m_k} \frac{q_{k,m}}{\left(1 - p_k z^{-1}\right)^m}$$

$$Z^{-1}\left[Q'_k(z)\right] = Z^{-1}\left[\frac{q_{k,1}}{1 - \mu z^{-1}}\right] \overset{p_k = \mu}{=} \begin{cases} \mu^n u(n), & \text{ROC} = \{z : |z| > |\mu|\} \quad (4.63) \\ -\mu^n u(-n-1) & \text{ROC} = \{z : |z| < |\mu|\} \quad (4.64) \end{cases}$$

در نتیجه تابعی لازم است انتخاب گردد که ROC تابع گویای $H(z)$ را شامل شود.

Extraction for Stable Rational $H(z)$

اگر $H(z)$ پایدار باشد فرایند استخراج بخش **causal** ساده تر خواهد شد.
پایدار شدن $H(z)$ موجب می گردد **ROC** مربوط به $Q_k'(z)$ ، دایره واحد را شامل گردد.

لذا، با پایدار بودن $Q_k(z)$ لازم است از رابطه (۴.۶۳) استفاده شود که نشانگر یک سیگنال **causal** است. و اگر p_k ناپایدار باشد $Q_k(z)$، **anti-causal** خواهد بود.

$$N_A + N_C = N$$

N_A : order of the poles of $H(z)$ outside the unit circle

N_C : order of the poles of $H(z)$ inside the unit circle

Extraction for Stable Rational $H(z)$

درنتیجه:

$$Q_A(z) = \sum_{\substack{k=1 \\ |p_k|>1}}^{K} Q_k(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N_A-1} \lambda_n z^{-n}}{\prod_{\substack{k=1 \\ |p_k|>1}}^{K} (1-p_k z^{-1})^{m_k}} \quad : \text{Anti-causal, proper, rational part of } H(z)$$

$$Q_C(z) = \sum_{\substack{k=1 \\ 0<|p_k|<1}}^{K} Q_k(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N_C-1} \mu_n z^{-n}}{\prod_{\substack{k=1 \\ 0<|p_k|<1}}^{K} (1-p_k z^{-1})^{m_k}} : \text{Causal, proper, rational part of } H(z)$$

درنتیجه بخش **causal** عبارت است از:

$$\Rightarrow \quad [H(z)]_+ = P_c(z) + Q_c(z)$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

روش کار:

۱- استخراج $P_C(z)$ و $P_A(z)$ با استفاده از تقسیمات متوالی.

۲- استخراج $Q_C(z)$ و $Q_A(z)$ با گسترش به کسرهای جزئی.

۳- $\left[H(z)\right]_+ = P_c(z) + Q_c(z)$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

مثال ۴.۸:

$$H(z) = \frac{5z - \frac{1}{2} + 5z^{-1} - \frac{5}{4}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \qquad \text{ROC} = \left\{ z : \frac{1}{4} < |z| < \infty \right\}$$

$$\begin{array}{l|l}
5z - \frac{1}{2} + 5z^{-1} - \frac{5}{4}z^{-2} & 1 - \frac{1}{4}z^{-1} \\ \hline
-\left(5z - \frac{5}{4}\right) & 5z + \frac{3}{4} = Q_A(z) \\
\quad \frac{3}{4} + 5z^{-1} - \frac{5}{4}z^{-2} & \\
\quad -\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{16}z^{-1}\right) & \\
\quad \frac{83}{16}z^{-1} - \frac{5}{4}z^{-2} &
\end{array}$$

$$H(z) = 5z + \frac{3}{4} + \frac{\frac{83}{16}z^{-1} - \frac{5}{4}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

ادامه مثال ۴.۸:

$$H(z)=\frac{5z-\frac{1}{2}+5z^{-1}-\frac{5}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad ROC=\left\{z:\frac{1}{4}<|z|<\infty\right\}$$

$$\begin{array}{l|l} -\frac{5}{4}z^{-2}+\frac{83}{16}z^{-1} & -\frac{1}{4}z^{-1}+1 \\ \hline -\left(-\frac{5}{4}z^{-2}+5z^{-1}\right) & 5z^{-1}-\frac{3}{4}=Q_C(z) \\ \hline \frac{3}{16}z^{-1} & \\ -\left(\frac{3}{16}z^{-1}-\frac{3}{4}\right) & \\ \hline \frac{3}{4} & \end{array}$$

$$H(z)=5z+\frac{3}{4}+5z^{-1}-\frac{3}{4}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$=5z+5z^{-1}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

ادامه مثال ۴.۸:

$$\Rightarrow [H(z)]_+=5z^{-1}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad \Rightarrow \quad h(n)=\delta(n-1)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

روش دوم محاسبه $[H(z)]_+$:

$$H(z)=c_{-1}z+c_0+c_1z^{-1}+\frac{\mu_0}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

ادامه مثال ۴.۸:

$$H(z)=\frac{c_{-1}z+\left(-\frac{1}{4}c_{-1}+c_0+\mu_0\right)+\left(-\frac{1}{4}c_0+c_1\right)z^{-1}+\left(-\frac{1}{4}c_1\right)z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$=\frac{5z-\frac{1}{2}+5z^{-1}-\frac{5}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}c_{-1} & c_0 & c_1 & \mu_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 5 & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

ادامه مثال ۴.۸:

$$H(z)=\frac{c_{-1}z+\left(-\frac{1}{4}c_{-1}+c_0+\mu_0\right)+\left(-\frac{1}{4}c_0+c_1\right)z^{-1}+\left(-\frac{1}{4}c_1\right)z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$=\frac{5z-\frac{1}{2}+5z^{-1}-\frac{5}{4}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}c_{-1} & c_0 & c_1 & \mu_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 5 & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

مثال ۴.۹:

$$H(z)=\frac{6z^2-51z+128-109z^{-1}+197z^{-2}-232z^{-3}+80z^{-4}}{2-17z^{-1}+40z^{-2}-16z^{-3}} \qquad \mathrm{ROC}=\left\{z:\frac{1}{2}<|z|<4\right\}$$

$$H(z)=3z^2+4+\frac{7z^{-1}+37z^{-2}-168z^{-3}+80z^{-4}}{2-17z^{-1}+40z^{-2}-16z^{-3}}$$

$$H(z)=3z^2+4+(-2)-5z^{-1}+\frac{4-17z^{-1}+32z^{-2}}{2-17z^{-1}+40z^{-2}-16z^{-3}}$$

$$Q(z)=\frac{2-\frac{17}{2}z^{-1}+16z^{-2}}{\left(1-0.5z^{-1}\right)\left(1-4z^{-1}\right)^2}=\frac{1}{\left(1-0.5z^{-1}\right)}+\frac{1}{\left(1-4z^{-1}\right)^2}$$

Extraction for Stable Rational $H(z)$

ادامه مثال ۴.۹:

$$H(z)=\frac{6z^2-51z+128-109z^{-1}+197z^{-2}-232z^{-3}+80z^{-4}}{2-17z^{-1}+40z^{-2}-16z^{-3}} \qquad \mathrm{ROC}=\left\{z:\frac{1}{2}<|z|<4\right\}$$

$$\left[H(z)\right]_+=2-5z^{-1}+\frac{1}{\left(1-0.5z^{-1}\right)}$$

Derivation of the Causal Wiener Filter

با توجه به رابطه (۴.۵۱) برای محاسبه فیلتر وینر **causal** لازم است حل شود:

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(j)R_z(j-i) = R_{sz}(i) \qquad i \geq 0 \qquad (4.51)$$

ولیکن امکان استفاده از تبدیل **Z** وجود ندارد چرا که معادله فقط برای $i \geq 0$ درست است. به منظور حل این مساله $h'(i)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$h'(i) = R_{sz}(i) - \sum_{j=0}^{\infty} h(j)R_z(j-i) = R_{sz}(i) \qquad i \in \mathbb{Z} \qquad (4.65)$$

$$h'(i) = \begin{cases} 0 & i \geq 0 \\ R_{sz}(i) - \sum_{j=0}^{\infty} h(j)R_z(j-i) = R_{sz}(i) & i < 0 \end{cases} \qquad (4.66)$$

Derivation of the Causal Wiener Filter

حال با توجه به تعریف $h'(i)$ امکان استفاده از تبدیل **Z** وجود دارد. در نتیجه با استفاده از تبدیل **Z** خواهیم داشت:

$$H'(z) = S_{sz}(z) - H(z)S_z(z) = S_{sz}(z) - H(z)S_z^+(z)S_z^-(z)$$

با تقسیم طرفین بر $S_z^-(z)$ خواهیم داشت:

$$\frac{H'(z)}{S_z^-(z)} = \frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)} - H(z)S_z^+(z)$$

به منظور استخراج بخش **causal**:

$$\left[\frac{H'(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ = \left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ - \left[H(z)S_z^+(z)\right]_+$$

Derivation of the Causal Wiener Filter

واضح است که $h'(i)$ کاملا **anti-causal** بود، لذا $H'(z)$ نیز فقط شامل قطب های خارج خارج از دایره واحد است و ریشه های $S_z^-(z)$ نیز در خارج دایره واحد قرار دارد. در نتیجه:

$$\left[\frac{H'(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ = 0$$

از سوی دیگر با توجه به تعریف $H(z)$ **causal** است و قطب های $S_z^+(z)$ نیز در داخل دایره واحد است.

$$\left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ - H(z)S_z^+(z) = 0$$

در نتیجه **Causal Wiener Filter**:

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{1}{S_z^+(z)}\left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ \qquad (4.68)}$$

Properties of the Causal Wiener Filter

با توجه به معادله (۴.۶۸) و فرض عدم و جود ریشه های $S_z^+(z)$ روی دایره واحد می توان نشان داد که $H(z)$ کاملا پایدار است.

مقدار MSE فیلتر وینر Causal:

با توجه به رابطه **MSE** برای فیلترهای **Non-causal** میتوان رابطه زیر را برای محاسبه **MSE** فیلترهای **causal** ارائه نمود:

$$MSE = R_s(0) - \sum_{i=0}^{\infty} h(i)R_{sz}(i)$$

$$MSE = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi}\oint_C \left[S_s(z) - H(z)S_{sz}(z^{-1})\right]z^{-1}dz = \sum\left[\text{Residues of integran inside unit circle}\right] & S_{sz}(z) \text{ rational} \\ \frac{1}{j2\pi}\oint_C \left[S_s(z) - H(z)S_{sz}^*(z)\right]z^{-1}dz & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (4.75)$$

The Causal Wiener Filter

مثال ۴.۱۰: مثال ۴.۲ و ۴.۵ را مجددا در نظر بگیرید

$$S_s(z)=\frac{0.0975}{\left(1-0.95z^{-1}\right)\left(1-0.95z\right)}$$

$$S_v(z)=2$$

$$\Rightarrow S_{sz}(z)=S_s(z)$$

$$S_z(z)=\frac{1-0.95^2}{(1-0.95z^{-1})(1-0.95z)}+2=2.3955\frac{\left(1-0.7931z^{-1}\right)\left(1-0.7931z\right)}{(1-0.95z^{-1})(1-0.95z)}$$

$$\Rightarrow\quad S_z(z)=1.5477\frac{\left(1-0.7931z^{-1}\right)}{(1-0.95z^{-1})}\times 1.5477\frac{\left(1-0.7931z\right)}{(1-0.95z)}=S_z^+(z)S_z^-(z)$$

The Causal Wiener Filter

ادامه مثال ۴.۱۰:

$$S_z^+(z)=1.5477\frac{\left(1-0.7931z^{-1}\right)}{(1-0.95z^{-1})}$$

$$S_z^-(z)=1.5477\frac{\left(1-0.7931z\right)}{(1-0.95z)}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}=\frac{\dfrac{0.0975}{\left(1-0.95z^{-1}\right)\left(1-0.95z\right)}}{1.5477\dfrac{\left(1-0.7931z\right)}{(1-0.95z)}}=\frac{0.0630}{\left(1-0.7931z\right)\left(1-0.95z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{-0.0794z^{-1}}{\left(1-1.2608z^{-1}\right)\left(1-0.95z^{-1}\right)}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}=\frac{0.2555}{\left(1-0.95z^{-1}\right)}-\frac{0.2555}{\left(1-1.2608z^{-1}\right)}\Rightarrow\left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+=\frac{0.2555}{\left(1-0.95z^{-1}\right)}$$

The Causal Wiener Filter

ادامه مثال ۴.۱۰:

$$\Rightarrow \quad H(z)=\frac{1}{S_z^+(z)}\left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ = \frac{\dfrac{0.2555}{\left(1-0.95z^{-1}\right)}}{1.5477\dfrac{\left(1-0.7931z^{-1}\right)}{\left(1-0.95z^{-1}\right)}} = \frac{0.1651}{\left(1-0.7931z^{-1}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad h(n)=0.1651\times(0.7921)^n u(n)$$

$$MSE = 1-0.1651\times\sum_{i=0}^{\infty}(0.7531)^i(0.95)^i = 1-\frac{0.1651}{1-0.7531\times0.95}=0.3302$$

$MSE_{no-filter}$	$MSE_{FIR-filter}$	MSE_{NC}	MSE_{C}
2	0.4405	0.2195	0.3302

Signal Prediction

برای پیش بینی یک سیگنال با استفاده از فیلتر وینر و به اندازه m مرحله خواهیم داشت:

$$\hat{s}(n+m)=\sum_{i=0}^{\infty}h(i)z(n-i)$$

در نتیجه معادله **Wiener-Hopf** به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\sum_{j=0}^{\infty}h(j)R_z(j-i)=R_{sz}(m+i) \qquad i\geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H(z)=\frac{1}{S_z^+(z)}\left[\frac{z^m S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+}$$

مقدار **MSE** نیز مشابه تخمینگر محاسبه می گردد.

باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 5

تخمین بازگشتی و فیلتر کالمن

مقدمه

- در فصل قبل فیلتر وینر و طراحی آن در سه نوع ارائه گردید.

  - **FIR Wiener filter**
  - **Non-Causal Wiener filter**
  - **Causal Wiener filter**

که هر یک مشکلات خاص خود را دارند و در عمل امکان استفاده از فیلتر FIR بیشتر از سایرین وجود خواهد داشت. ولیکن مشکل فیلتر FIR نیز این است که در هر مرحله تعداد محدودی از مشاهدات را در تخمین به کار می گیرد و این امر موجب می گردد که بخشی از داده ها به مرور زمان در تخمین بی تاثیر می گردند. به عبارت دیگر مشاهدات پیشین حذف می گردند.

مقدمه

- لذا اگر بتوان روشی را ارائه نمود که مشاهدات قبلی را در تخمین بکار گیرد امکان تخمین بهتر فراهم می گردد.
- دو ایده عمده را می توان در این خصوص ارائه نمود:

1. حل معادلات فیلتر وینر با اضافه شدن مشاهدات که نیاز حجم حافظه زیاد و محاسبات پیچیده دارد.
2. ارائه یک فرم بازگشتی که امکان به روز شدن تخمین در حین اضافه شدن اطلاعات را داشته باشد.

مقدمه

LMMSE Estimation

- معادلات یک فیلتر LMMSE نامتغیر با زمان:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} h(i) z(n-i), \qquad (5.1)$$

- و در صورتیکه در مساله تخمین نیاز به تخمینگر هایی باشد که نسبت به زمان متغیرند، لذا می توان معادله (۵.۱) را به صورت معادله (۵.۲) بازنویسی نمود:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} h_n(i) z(n-i), \qquad (5.2)$$

- که حل آن با استفاده از قاعده MSE منجر به معادله Wiener-Hopf متغیر با زمانی به صورت زیر می شود:

$$\sum_{j=0}^{n} h_n(j) R_z(n-i, n-j) = R_{sz}(n, n-i), \; 0 \le i \le n \qquad (5.3)$$

مقدمه
LMMSE Estimation

- استفاده از معادله (۵.۳) در مساله تخمین به صورت زیر امکان پذیر خواهد بود:

$$\sum_{j=0}^{n} h_n(j) R_z(n-i, n-j) = R_{sz}(n, n-i), \ 0 \le i \le n \qquad (5.3)$$

  – در هر زمان n، معادله (۵.۳) شامل n معادله خطی است که لازم است برای محاسبه n ضریب ثابت فیلتر حل شوند.

$$\{h_n(i) : 0 \le i \le n-1\}$$

  – با استفاده از ضرایب حاصل معادله (۵.۲):

$$\{z(i) : 1 \le i \le n\} \xrightarrow{\text{Causal Wiener Filter}} \hat{s}(n)$$

مقدمه
LMMSE Estimation

- پر واضح است که در این فیلترلازم است تمامی مشاهدات ذخیره گردند، لازم است تمامی ضرایب ذخیره گردند و همچنین لازم است n معادله خطی حل گردند که در صورتی که n بزرگ باشد این مشکل مضاعف می گردد. در نتیجه پیاده سازی این فیلتر نیازمند حافظه زیادی است(به این دسته از فیلترها، فیلتر ***growing-Memory LMMSE*** می گویند) و امکان پیاده سازی واقعی ندارد.

مقدمه

Estimation based on a State model

- **ML estimators:** $f_z(z \mid s = s)$
- **MAP estimators:** $f_s(s \mid z = z)$

- **اگر اطلاعات کافی در خصوص تولید سیگنال $s(n)$ وجود داشته باشد امکان محاسبه $f_z(z \mid s = s)$ و $f_s(s \mid z = z)$ وجود دارد و در نتیجه امکان استفاده از تخمین های ML و MAP نیز وجود دارد.**
  – اگر سیگنال $s(n)$ را بتوان به صورت یک مدل فضای حالت بیان نمود:

$$x(n+1) = \Phi x(n) + \omega(n)$$
$$s(n) = Cx(n),$$

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

مقدمه

Estimation based on a State model

- **ML estimators:** $f_z(z \mid s = s)$
- **MAP estimators:** $f_s(s \mid z = z)$

- **اگر اطلاعات کافی در خصوص تولید سیگنال $s(n)$ وجود داشته باشد امکان محاسبه $f_z(z \mid s = s)$ و $f_s(s \mid z = z)$ وجود دارد و در نتیجه امکان استفاده از تخمین های ML و MAP نیز وجود دارد.**

- **اگر سیگنال $s(n)$ را بتوان به صورت یک مدل فضای حالت بیان نمود:**

$$x(n+1)_{N\times 1} = \Phi_{N\times N} x(n) + \omega(n)_{N\times 1}$$
$$s(n) = C_{1\times N} x(n)$$
$$z(n) = s(n) + v(n)$$

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

مقدمه

Estimation based on a State model

- مساله جدید تخمین متغیر حالت $x(n)$ است که با استفاده از آن امکان تخمین سیگنال $s(n)$ به سادگی وجود دارد که فرم کلی آن به صورت زیر است:

$$\hat{x}(n) = \alpha_n(\hat{x}(0), \hat{P}(0), Z_n) \qquad (5.4)$$

where,

$\hat{x}(0)$ = a guess of $E[x(0)]$

$\hat{P}(0)$= a guess of Cov$[x(0)]$

$$Z_n = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix}$$

- لذا هدف یافتن تخمین $\hat{x}(n)$ است که یک ضابطه را بهینه می نماید.

مقدمه

ML Estimation

For simplicity: $\omega(n) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(n+1) = \Phi x(n) & (5.5) \\ s(n) = Cx(n) & (5.6) \end{cases}$

با فرض معکوس پذیر بودن ماتریس Φ

$$x(n) = \Phi^{-1}x(n+1) \quad \text{and} \quad x(n-1) = \Phi^{-1}x(n) \qquad (5.7)$$

$$\Rightarrow \quad z(i) = s(i) + v(i) = C\Phi^{-n+i}x(n) + v(i), \quad \text{i=1,2,...,n.}$$

$$\Rightarrow \quad Z_n = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Phi^{-n+1} \\ C\Phi^{-n+2} \\ \vdots \\ C \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \\ \vdots \\ v(n) \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow z_n = U_n x(n) + V_n,$$

مقدمه

ML Estimation

در صورتیکه $v(n)$ نویز سفید گوسی با میانگین صفر باشد در نتیجه:

$$f_{v_n}(V_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|R_n\right|^{1/2}} \exp(-\frac{1}{2} V_n^T \; R_n^{-1} \; V_n), \qquad (5.8)$$

که در آن $R_n = Cov(V_n)$

$$f_{z_n}(Z_n \left| x(n) = x\right.) = f_{v_n}(V_n)\Big|_{v_n = z_n - u_n x} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|R_n\right|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(Z_n - U_n x)^T R_n^{-1}(Z_n - U_n x)\right] \qquad (5.9)$$

$$\max \; f_{z_n}(Z_n \left| x(n) = x\right|) \Rightarrow \min\left[(Z_n - U_n x)^T R_n^{-1}(Z_n - U_n x)\right]$$

$$\xrightarrow{Least\ Square} \hat{x}_{ML}(n) = [U_n^T R_n^{-1} U_n]^{-1} U_n^T R_n^{-1} Z_n. \qquad (5.10)$$

مقدمه

ML Estimation

همانگونه که از رابطه (۵.۱۰) مشخص است تخمین **ML** نیازمند اطلاعات زیادی از مشاهدات است.

مقدمه

MAP Estimation

Similar to ML estimator: $\omega(n)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x(n+1)=\Phi x(n) & (5.5) \\ s(n)=Cx(n) & (5.6) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad z(i)=s(i)+v(i) \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

$$f_{v_n}(V_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|R_n\right|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}V_n^T\;R_n^{-1}\;V_n\right), \qquad (5.8)$$

با توجه به ویژگی فیلتر MAP که نیازمند اطلاعاتی از سیگنال است،
برای حالت ها فرض توزیع گوسی با میانگین $\bar{x}(n)$ و کوواریانس $P(n)$
در نظر گرفته می شود.

$$f_{x(n)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|P(n)\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(x-\bar{x}(n)\right)^T P^{-1}(n)\left(x-\bar{x}(n)\right)\right] \qquad (5.11)$$

مقدمه

MAP Estimation

با توجه به آنچه پیش از این در مورد تخمین MAP گفته شده است:

$$f_{x(n)}(x\,|\,\mathbf{Z}_n=Z_n)=\frac{f_{Z_n}(Z_n\,|\,\mathbf{x}(n)=x)\,f_{x(n)}(x)}{f_{Z_n}(Z_n)}$$

$$\Rightarrow\; f_{z_n}(Z_n\,|\,\mathbf{x}(n)=x)\,f_{x(n)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^n\left|R_n\right|^{1/2}\left|p(n)\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(Z_n-U_nx\right)^T R_n^{-1}\left(Z_n-U_nx\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left(x-\bar{x}(n)\right)^T p^{-1}(n)\left(x-\bar{x}(n)\right)\right]$$

که برای ماکزیمم نمودن آن لازم است عبارت زیر می نیمم باشد:

$$\Psi=\left(Z_n-U_nx\right)^T R_n^{-1}\left(Z_n-U_nx\right)+\left(x-\bar{x}(n)\right)^T p^{-1}(n)\left(x-\bar{x}(n)\right)$$

مقدمه

MAP Estimation

با مشتقگیری از Ψ نسبت به x :

$$-2U_n^T R_n^{-1} Z_n + 2U_n^T R_n^{-1} U_n x - 2P^{-1}(n)\bar{x}(n) + 2P^{-1}(n)x = 0$$

$$\Rightarrow \hat{x}_{MAP}(n) = [U_n^T R_n^{-1} U_n +_n P^{-1}(n)]^{-1}[P^{-1}(n)\bar{x}(n) + U_n^T R_n^{-1} Z_n] \qquad (5.12)$$

لازم به ذکر است که ماتریس $U_n^T R_n^{-1} U_n +_n P^{-1}(n)$ همواره معکوس پذیر است چرا که $P^{-1}(n) > 0$.

همچنین:

$$\bar{x}(n) = \Phi^n \bar{x}(0) \qquad (5.13)$$

$$P(n) = \Phi^n P(0)(\Phi^T)^n \qquad (5.14)$$

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

15

مقدمه

MAP Estimation

لذا

$$\hat{x}_{MAP}(n) = \left[U_n^T R_n^{-1} U_n + \Phi^n \hat{P}(0)(\Phi^T)^n\right]^{-1} \times \left[(\Phi^T)^{-n} \hat{P}^{-1}(0)\hat{x}(0) + U_n^T R_n^{-1} Z_n\right] \qquad (5.15)$$

پر واضح است که تخمین MAP نیز به تمامی مشاهدات گذشته نیاز دارد.

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

16

تخمین یک سیگنال ثابت

در این بخش به تخمین یک سیگنال ثابت با استفاده از تخمین بازگشتی خواهیم پرداخت که مساله **growing-Memory** در آن حل شده است.

$s(n) = s$

لذا تخمین LMMSE با استفاده از مشاهدات $z(1), z(2) \ldots, z(n)$ عبارت است از:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} h_n(i) z(n-i)$$

$$MSE = E\left[\left(s(n) - \sum_{i=0}^{n-1} h_n(i) z(n-i)\right)^2\right].$$

تخمین یک سیگنال ثابت

فرض کنید

$$E\left[s^2\right] = P > 0,$$

$$R_s(i-j) = E\left[s(i)s(j)\right] = E\left[s^2\right] = P, \qquad \forall i, j \in \mathbb{Z}.$$

که مقدار واقعی P نامشخص است. همچنین

$$z(n) = s(n) + v(n) = s + v(n)$$

$s(n)$ & $v(n)$: JWSS

$v(n)$: white noise with known variance σ_v^2

$$R_v(i-j) = E\left[v(i)v(j)\right] = \sigma_v^2 \delta(i-j),$$

$$\Rightarrow \; R_z(i-j) = R_s(i-j) + R_v(i-j) = P + \sigma_v^2 \delta(i-j).$$

تخمین یک سیگنال ثابت

به منظور محاسبه ضرایب فیلتر:

$$\frac{\partial MSE}{\partial h_n(i)} = -2E\left[s(n)z(n-i)\right] + 2\sum_{j=0}^{n-1} h_n(j)E\left[z(n-i)z(n-j)\right] = 0$$

در نتیجه:

$$\sum_{j=0}^{n-1} h_n(j)R_z(j-i) = R_{sz}(i) = R_s(i) = P, \qquad i=0,1,\dots,n-1.$$

که در فرم ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} P+\sigma_v^2 & P & \cdots & P \\ P & P+\sigma_v^2 & \cdots & P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P & P & \cdots & P+\sigma_v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_n(0) \\ h_n(1) \\ \vdots \\ h_n(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P \\ \vdots \\ P \end{bmatrix}$$

تخمین یک سیگنال ثابت

با توجه به متقارن بودن ماتریس ضرایب و شکل معادله:

$$h_n(0) = h_n(1) = \cdots = h_n(n-1) = h_n \qquad (5.16)$$

$$= \frac{P}{nP+\sigma_v^2} = \frac{1}{n+\sigma_v^2/P} \quad . \qquad (5.17)$$

لذا:

$$\hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} h_n z(n-i) = h_n \sum_{i=0}^{n-1} z(n-i) \qquad (5.18)$$

معادله (۵.۱۸) نشان می دهد که با افزایش **n** ($n \to \infty$)، حافظه مورد نیاز به سمت بی نهایت میل خواهد نمود.

تخمین یک سیگنال ثابت

از معادله (۵.۱۸) داریم:

$$\hat{s}(n+1) = h_{n+1}\sum_{i=0}^{n} z(n+1-i), \qquad (5.19)$$

که

$$h_{n+1} = \frac{P}{(n+1)P+\sigma_v^2} = \frac{1}{n+1+\sigma_v^2/P} \qquad (5.20)$$

اگر $j=i-1$ باشد رابطه (۵.۱۹) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\hat{s}(n+1) = h_{n+1}\sum_{j=-1}^{n-1} z(n-j) = h_{n+1}z(n+1) + h_{n+1}\sum_{j=0}^{n-1} z(n-j) \qquad (5.21)$$

از مقایسه رابطه (۵.۱۸) و (۵.۲۱) خواهیم داشت:

$$\hat{s}(n+1) = \frac{h_{n+1}}{h_n}\hat{s}(n) + h_{n+1}z(n+1). \qquad (5.22)$$

تخمین یک سیگنال ثابت

رابطه (۵.۲۲) نشان می دهد که در تخمین $\hat{s}(n+1)$ به مقدار آخرین تخمین و آخرین مشاهده نیاز است و دیگری نیازی به ذخیره سازی اطلاعات نیست. به عبارت دیگر رابطه (۵.۲۲) یک تخمین بازگشتی را در اختیار می گذارد.

حال می توان سعی کرد ضرایب فیلتر را نیز به صورت برگشتی محاسبه نمود

$$\left.\begin{aligned} h_n &= \frac{P}{nP+\sigma_v^2} = \frac{1}{n+\sigma_v^2/P} && (5.17) \\ h_{n+1} &= \frac{P}{(n+1)P+\sigma_v^2} = \frac{1}{n+1+\sigma_v^2/P} && (5.20) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{n+\sigma_v^2/P}{n+1+\sigma_v^2/P} = 1-h_{n+1}$$

تخمین یک سیگنال ثابت

در نتیجه:

$$h_{n+1} = \frac{h_n}{1+h_n} = h_n(1+h_n)^{-1} \qquad (5.24)$$

و با استفاده از آن می توان رابطه (۵.۲۲) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\boxed{\hat{s}(n+1) = \hat{s}(n) + \underbrace{h_{n+1}}_{filter\ gain}\left[z(n+1) - \hat{s}(n)\right] \qquad (5.25)}$$

محاسبه MSE:

محاسبه **MSE** با توجه به تغییر سیگنال تخمینی $\hat{s}(n)$ ، لازم است به ازای هر بار تخمین مجددا $MSE(n)$ محاسبه گردد. لذا داریم:

تخمین یک سیگنال ثابت

$$\begin{aligned}
MSE(n) &= E\left[(s-\hat{s}(n))^2\right] \\
&= E\left[s^2\right] - 2E\left[s\hat{s}(n)\right] + E\left[\hat{s}^2(n)\right] \qquad (5.26) \\
&= P - 2h_n\sum_{i=0}^{n-1} E\left[sz(n-i)\right] + h_n^2 E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} z(n-i)\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} z(n-j)\right)\right]
\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
E\left[sz(n-i)\right] &= E\left[s(s+v(n-i))\right] = E[s^2] + E[sv(n-i)] \\
&= P + E[s]E[v(n-i)] = P
\end{aligned}$$

تخمین یک سیگنال ثابت

همچنین

$$E\left[z(n-i)z(n-j)\right]=E\left[(s+v(n-i))\,(s+v(n-j))\right]=p+\sigma_v^2\delta(i-j),$$

که نتیجه می دهد:

$$h_n^2 E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} z(n-i)\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} z(n-j)\right)\right]=h_n^2(n^2P+n\sigma_v^2)$$

و در نتیجه:

$$MSE(n)=P-2nh_nP+h_n^2(n^2P+n\sigma_v^2) \qquad (5.27)$$

تخمین یک سیگنال ثابت

با فرض معلوم بودن P و با استفاده از (۵.۱۷)

$$MSE\,(n)=\frac{P\sigma_v^2}{nP+\sigma_v^2}=h_n\sigma_v^2 \qquad (5.28)$$

و در نتیجه می توان مقدار MSE را نیز به صورت بازگشتی محاسبه نمود:

$$MSE(n+1)=h_{n+1}\sigma_v^2=\frac{h_{n+1}}{h_n}MSE(n)=(1-h_{n+1})MSE(n) \qquad (5.29)$$

تخمین یک سیگنال ثابت

ارائه یک الگوریتم بازگشتی به منظور تخمین سیگنال ثابت:

۱- مقدار دهی اولیه:

$$n=0 \qquad \hat{s}(0)=\begin{cases} E[s] \\ \vee \\ 0 \end{cases}$$

$$P=V \ \text{: a guess} \qquad h_0=\frac{V}{\sigma_v^2} \qquad MSE(0)=V$$

۲- دریافت مشاهده $z(n+1)$

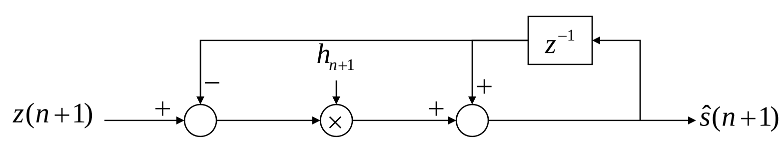
تخمین یک سیگنال ثابت

ارائه یک الگوریتم بازگشتی به منظور تخمین سیگنال ثابت:

۳- محاسبه روابط (۵.۲۴)، (۵.۲۵) و (۵.۲۹)

$$h_{n+1}=h_n(1+h_n)^{-1}$$
$$\hat{s}(n+1)=\hat{s}(n)+h_{n+1}\left[z(n+1)-\hat{s}(n)\right],$$
$$MSE(n+1)=(1-h_{n+1})MSE(n).$$

۴- افزایش مقدار n و بازگشت به مرحله ۲.



تخمین یک سیگنال ثابت

ارائه یک الگوریتم بازگشتی به منظور تخمین سیگنال ثابت:

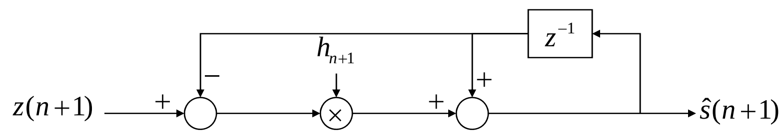
۳- محاسبه روابط (۵.۲۴)، (۵.۲۵) و (۵.۲۹)

$$h_{n+1} = h_n (1+h_n)^{-1}$$

$$\hat{s}(n+1) = \hat{s}(n) + h_{n+1}\left[z(n+1) - \hat{s}(n)\right],$$

$$MSE(n+1) = (1-h_{n+1})MSE(n).$$

۴- افزایش مقدار n و بازگشت به مرحله ۲.



تخمین یک سیگنال ثابت

بررسی وضعیت تخمین:

$$E\left[\hat{s}(n)\right] = E\left[h_n \sum_{i=0}^{n-1} z(n-i)\right] = h_n \sum_{i=0}^{n-1} E\left[z(n-i)\right]$$

$$= h_n \sum_{i=0}^{n-1} (E[s] + E[v(n-i)]) = h_n \sum_{i=0}^{n-1} E[s]$$

$$= nh_n E[s] = \frac{n}{n+\sigma_v^2 / V} E[s]. \qquad (5.31)$$

مشخص است که این تخمینگر در حالت کلی unbiased نیست ولیکن

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\hat{s}(n)\right] = E[s] \qquad (5.32)$$

تخمین یک سیگنال ثابت

بررسی وضعیت تخمین:

$$MSE(n) = P - (2nP)h_n + (n^2P + n\sigma_v^2)h_n^2$$

$$= p - (2nP)\frac{V}{nV+\sigma_v^2} + (n^2P + n\sigma_v^2)\left(\frac{V}{nV+\sigma_v^2}\right)^2$$

$$= \frac{(nV+\sigma_v^2)^2 P - 2nPV(nV+\sigma_v^2) + (n^2P + n\sigma_v^2)\ V^2}{(nV+\sigma_v^2)^2} = \frac{nV^2\sigma_v^2 + P\sigma_v^2}{(nV+\sigma_v^2)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} MSE(n) = \lim_{n\to\infty}\frac{nV^2\sigma_v^2 + P\sigma_v^4}{n^2V^2 + 2nV\sigma_v^2 + \sigma_v^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{nV^2\sigma_v^2}{n^2V^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_v^2}{n} = 0 \qquad (5.33)$$

در نتیجه تخمین بازگشتی ارائه شده برای $n \to \infty$ یک تخمین کامل است.

مساله تخمین بازگشتی

مساله تخمین بازگشتی محاسبه $\hat{s}(n+1)$ با استفاده از مشاهدات $z(n+1)$ و $\hat{s}(n)$ است.

$$\hat{s}(n+1) = \alpha_{n+1}(\hat{s}(n), \mathrm{z(n+1)}). \qquad (5.34)$$

توجه کنید که تخمینگر حاصل میتواند غیرخطی و/یا متغیر با زمان باشد.
در ادامه به دنبال <u>تخمین خطی</u> با شرط بهینه سازی <u>MMSE</u> خواهیم بود.

مدل سیگنال / مشاهدات

در این بخش فرضیات لازم برای سیگنال و مشاهدات برای استفاده در مساله تخمین ارائه می شود:

- در این بخش سیگنال و مشاهدات به صورت متغیرهای حالت و خروجی ازیک مدل فضای حالت در نظر گرفته می شوند.
- فرض کنید $s(n)$ و $z(n)$ بردار فرایندهای تصادفی با ابعاد p باشند:

$$s(n)=\begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \\ \vdots \\ s_p(n) \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad z(n)=\begin{bmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_p(n) \end{bmatrix}. \qquad (5.35)$$

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

33

مدل سیگنال / مشاهدات

- بطور کلی $s(n)$ یک نویز رنگی است که با عبور نویز سفید از یک سیستم خطی حاصل می شود.

$$x(n+1)=\Phi_{N\times N}x(n)+\Gamma_{N\times m}\omega(n), \quad x(0)=x_0 \qquad (5.36)$$

$$s(n)=C_{p\times N}x(n), \qquad (5.37)$$

$$z(n)=s(n)+v(n) \qquad (5.38)$$

که

$\omega(n)$: zero mean white noise

$$E\left[\omega(i)\omega^T(j)\right]=Q_{m\times m}\delta(i-j); \qquad (5.39)$$

where, Q: covariance matrix

Estimation Theory
by Dr B. Moaveni

34

مدل سیگنال / مشاهدات

$\omega(n)$: zero mean white noise

$$E\left[v(i)v^T(j)\right] = R_{p\times p}\delta(i-j); \qquad (5.40)$$

where, R: covariance matrix

- همچنین x_0 ، $\omega(n)$ و $v(n)$ متغیرهاس مستقلی هستند.
- ماتریس های Q و R، ماتریس های کوواریانس، متقارن و مثبت معین هستند.

توجه: خواص و فرضیات فوق در خصوص سیگنال و مشاهدات کمک می کند فیلتر کالمن در موقعیت هایی کار کند که فیلتر وینر قابلیت لازم را ندارد.

مدل سیگنال / مشاهدات

فیلتر وینر نیازمند سیگنال WSS و نویز فرایند با میانگین صفر و سیستم پایدار می باشد. در حالیکه فیلتر کالمن چنین محدودیت هایی وجود ندارد. به عبارت دیگر فیلتر کالمن می تواند برای یک سیستم ناپایدار و همچنین برای حالت های با میانگین غیر صفر بکار رود.
همچنین امکان استفاده از کالمن فیلتر برای یک سیستم متغیر با زمان با نویز **non-stationary** نیز وجود دارد.

توجه: از سوی دیگر فیلتر وینر به مشخصات استاتیک سیگنال و نویز نیاز دارد و فقط تابع های همبستگی و یا چگالی طیفی لازم هستند.
در حالیکه در فیلتر کالمن به شناخت کامل مدل سیستم به صورت فضای حالت نیاز است.

تخمین ***a posteriori*** و ***a priori***

a priori		***a posteriori***
Available measurements: $Z^- = \{z(1),\ldots,z(n-1)\}$		Available measurements: $Z^- = \{z(1),\ldots,z(n)\}$
Estimate of $x(n)$: $\hat{x}^-(n)$	$z(n)$ become available	Estimate of $x(n)$: $\hat{x}(n)$
Estimation Error: $\tilde{x}^-(n)$		Estimation Error: $\tilde{x}(n)$
Error covariance: $P^-(n)$		Error covariance: $P(n)$
MSE: $E\left[\tilde{x}^-(n)\left(\tilde{x}^-(n)\right)^T\right] = trace\left(P^-(n)\right)$		MSE: $E\left[\tilde{x}(n)\left(\tilde{x}(n)\right)^T\right] = trace\left(P(n)\right)$

$P^-(n) = Cov\left[\tilde{x}^-(n)\right] = E\left[\tilde{x}^-(n)\left(\tilde{x}^-(n)\right)^T\right]$

$P(n) = Cov\left[\tilde{x}(n)\right] = E\left[\tilde{x}(n)\left(\tilde{x}(n)\right)^T\right]$

$\tilde{x}^-(n) = x(n) - \hat{x}^-(n)$

$\tilde{x}(n) = x(n) - \hat{x}(n)$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

فرض کنید:

$\hat{x}(n-1)$: as a LMMSE is available

$GOAL: \hat{x}(n) = ?$ from Z^-

در نتیجه ما به دنبال یافتن تخمین (*a priori*) $\hat{x}^-(n)$ **با استفاده از تخمین (*a posteriori*)** $\hat{x}(n-1)$ **هستیم.**

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a priori* Estimate

از آنجایی که $\hat{x}^{-}(n)$ لازم است یک تخمین بهینه LMMSE باشد لذا باید شرط تعامد را برآورده نماید:

$$E\left[(x(n)-\hat{x}^{-}(n))z^{T}(i)\right]=0 \qquad i=1,2,\ldots,n\text{-}1 \qquad (5.45)$$

و با تعریف

$$Z_{n-1}=\begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(n-1) \end{bmatrix}$$

میتوان رابطه (۵.۴۵) را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$E\left[(x(n)-\hat{x}^{-}(n))Z_{n-1}^{T}\right]=0_{N\times n-1} \qquad (5.46)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a priori* Estimate

$$\left.\begin{array}{l}(5.36) \\ x(n-1)=\hat{x}(n-1)+\tilde{x}(n-1)\end{array}\right\}\rightarrow \; x(n)=\Phi\hat{x}(n-1)+\Phi\tilde{x}(n-1)+\Gamma\omega(n-1)$$

$$(5.46)\rightarrow \quad E\left[\left(\Phi\hat{x}(n-1)-\hat{x}^{-}(n)\right)Z_{n-1}^{T}\right]+\Phi \underbrace{E\left[\tilde{x}(n-1)Z_{n-1}^{T}\right]}_{\substack{0 \\ \text{Orthogonal principle}}}+\Gamma \underbrace{E\left[\omega(n-1)Z_{n-1}^{T}\right]}_{\substack{0 \\ \text{Independency and zero mean noise}}}=0$$

$$\Rightarrow \; E\left[\left(\Phi\hat{x}(n-1)-\hat{x}^{-}(n)\right)Z_{n-1}^{T}\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{x}^{-}(n)=\Phi\hat{x}(n-1) \qquad (5.47)}$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a priori* Error Covariance

به منظور استخراج ارتباط ماتریس خطای کوواریانس $P(n-1)$ با $P^{-}(n)$ داریم:

$$
\begin{aligned}
P^{-}(n) &= Cov\left[x(n)-\hat{x}^{-}(n)\right] \\
&= Cov\left[\Phi x(n-1)+\Gamma\omega(n-1)-\Phi\hat{x}(n-1)\right] \\
&= Cov\left[\Phi\tilde{x}(n-1)+\Gamma\omega(n-1)\right] \qquad (5.48)
\end{aligned}
$$

همچنین با توجه به استقلال $\omega(n-1)$ و $\tilde{x}(n-1)$:

$$E[\tilde{x}(n-1)\omega^{T}(n-1)]=0$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a priori* Error Covariance

در نتیجه:

$$\boxed{P^{-}(n)=\Phi P(n-1)\Phi^{T}+\Gamma Q\Gamma^{T} \qquad (5.49)}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\hat{x}^{-}(n) &= \Phi\hat{x}(n-1) && (5.47) \\
P^{-}(n) &= \Phi P(n-1)\Phi^{T}+\Gamma Q\Gamma^{T} && (5.49)
\end{aligned}
\right\} \rightarrow \textit{time update}
$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

Measurement Update

مساله دیگری که لازم است حل شود، نحوه استفاده از مشاهده $z(n)$ در تصحیح تخمین $x(n)$است. به عبارت دیگر نحوه به روز شدن مقدار $\hat{x}(n)$ با استفاده از $z(n)$لازم است ارائه گردد. که در این مسیر ماتریس $P(n)$ نیز می بایستی که محاسبه گردد:

The *a posteriori* Estimation

$\hat{x}(n-1): knwon$

$$E\left[\left(x(n-1)-\hat{x}(n-1)\right)Z_{n-1}^{T}\right]=0 \qquad (5.50)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

$$\xrightarrow{LMMSE\ \text{estimation}} \hat{x}(n-1)=\sum_{j=0}^{n-1} H_{n-1}(j)z(j)=J(n-1)Z_{n-1} \qquad (5.51)$$

where

$$J(n-1)=[H_{n-1}(1)\ \ H_{n-1}(2)\ \ \ldots\ \ H_{n-1}(n-1)\ ].$$

حال برای یافتن $\hat{x}(n)$:

$$\hat{x}(n)=\sum_{j=1}^{n} H_n(j)z(j) \qquad (5.52)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

که لازم است شرط تعامد را برآورده نماید، لذا:

$$E\left[\left(x(n)-\hat{x}(n)\right)z^{T}(i)\right]=0 \qquad i=1,2,\ldots,n$$

و/یا:

$$E\left[\left(x(n)-\hat{x}(n)\right)Z_n^{T}\right]=0, \qquad (5.53)$$

$$where \qquad Z_n=\begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Z_{n-1} \\ z(n) \end{bmatrix}.$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

در نتیجه رابطه (۵.۵۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{x}(n)=K(n)z(n)+G(n)Z_{n-1} \qquad (5.54)$$

$$where$$

$$K(n)=H_n(n)$$

$$G(n)=\left[H_n(1),\ H_n(2),\ \ldots\ H_n(n-1)\right].$$

حال نیاز به محاسبه $G(n)$ و $K(n)$ است.

$$\hat{x}(n)=\underset{?}{K(n)}\,z(n)+\underset{?}{G(n)}\,Z_{n-1} \qquad (5.54)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

$$(5.54)\xrightarrow{(5.37)\ (5.38)}\ \hat{x}(n)=K(n)[Cx(n)+v(n)]+G(n)Z_{n-1}$$
$$=K(n)C\Phi x(n-1)+K(n)C\Gamma\omega(n-1)\qquad(5.55)$$
$$+K(n)v(n)+G(n)Z_{n-1}$$

همچنین با استفاده از رابطه (۵.۳۶) و $x(n-1)=\hat{x}(n-1)+\tilde{x}(n-1)$

$$x(n)=\Phi\hat{x}(n-1)+\Phi\tilde{x}(n-1)+\Gamma\omega(n-1).\qquad(5.56)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

$$\left.\begin{matrix}(5.55)\\(5.56)\end{matrix}\right\}\rightarrow\ \tilde{x}(n)=x(n)-\hat{x}(n)$$
$$=\left[I-K(n)C\right]\Phi\hat{x}(n-1)+\left[I-K(n)C\right]\Phi\tilde{x}(n-1)\qquad(5.57)$$
$$+\left[I-K(n)C\right]\Gamma\omega(n-1)-K(n)v(n)-G(n)Z_{n-1}$$

$$(5.57)\xrightarrow[\hat{x}(n-1)=J(n-1)Z_{n-1}]{(5.51)}$$

$$\tilde{x}(n)=\left[I-K(n)C\right]\Phi J(n-1)Z_{n-1}+\left[I-K(n)C\right]\Phi\tilde{x}(n-1)$$
$$+\left[I-K(n)C\right]\Gamma\omega(n-1)-K(n)v(n)-G(n)Z_{n-1}.\qquad(5.58)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

حال با استفاده از شرط (۵.۵۳) :

$$(5.53): \quad E\left[\tilde{x}(n)Z_n^T\right] = E\left[\tilde{x}(n)\begin{bmatrix} Z_{n-1} \\ z(n) \end{bmatrix}^T\right] = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E[\tilde{x}(n)Z_{n-1}^T] = 0 & (5.59) \\ E[\tilde{x}(n)z^T(n)] = 0 & (5.60) \end{cases}$$

در نتیجه:

$$E[\tilde{x}(n)Z_{n-1}^T] = \left[I - K(n)C\right]\Phi J(n-1)E\left[Z_{n-1}Z_{n-1}^T\right] - G(n)E\left[Z_{n-1}Z_{n-1}^T\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad G(n)E\left[Z_{n-1}Z_{n-1}^T\right] = \left[I - K(n)C\right]\Phi J(n-1)E\left[Z_{n-1}Z_{n-1}^T\right] \qquad (5.61)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Estimation

که:

$$R > 0 \rightarrow E\left[Z_{n-1}Z_{n-1}^T\right] \text{ is invertible}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(n) = \left[I - K(n)C\right]\Phi J(n-1) \qquad (5.62)}$$

در نتیجه:

$$\hat{x}(n) = \Phi\hat{x}(n-1) + K(n)\left[z(n) - C\Phi\hat{x}(n-1)\right] \qquad (5.63)$$

$$\boxed{\xrightarrow{(5.47)} \hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right]. \qquad (5.64)}$$

?

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *Kalman* gain

$$\left.\begin{array}{l}(5.36)\\(5.63)\end{array}\right\} \rightarrow \tilde{x}(n) = \Phi x(n-1) + \Gamma\omega(n-1) - \Phi\hat{x}(n-1) - K(n)z(n) + K(n)C\Phi\hat{x}(n-1) \quad (5.65)$$

همچنین:

$$\left.\begin{array}{l}(5.37)\\(5.38)\end{array}\right\} \rightarrow \quad z(n) = C\Phi x(n-1) + C\Gamma\omega(n-1) + v(n) \quad (5.66)$$

$$= C\Phi\tilde{x}(n-1) + C\Phi\hat{x}(n-1) + C\Gamma\omega(n-1) + v(n) \quad (5.67)$$

با جایگذاری معادله (۵.۶۶) در (۵.۶۵)

$$\tilde{x}(n) = \Phi x(n-1) + \Gamma\omega(n-1) - \Phi\hat{x}(n-1) + K(n)C\Phi\hat{x}(n-1)$$
$$- K(n)\left\{C\Phi\tilde{x}(n-1) + C\Phi\hat{x}(n-1) + C\Gamma\omega(n-1) + v(n)\right\}$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *Kalman* gain

$$\tilde{x}(n) = \left[I - K(n)C\right]\Phi\tilde{x}(n-1) + \left[I - K(n)C\right]\Gamma\omega(n-1) - K(n)v(n) \quad (5.68)$$

با جایگزینی معادله (۵.۶۷) و (۵.۶۸) در شرط (۵.۶۰) خواهیم داشت:

$$E\left[\tilde{x}(n)z^T(n)\right] = \Phi P(n-1)\Phi^T C^T + \Gamma Q\Gamma^T C^T$$
$$-K(n)C\Phi P(n-1)\Phi^T C^T - K(n)C\Gamma Q\Gamma^T C^T - K(n)R = 0, \quad (5.69)$$

$$(5.49) \rightarrow P^-(n)C^T = K(n)[CP^-(n)C^T + R],$$

$$\boxed{\Rightarrow \text{Kalman Gain}: \quad K(n) = P^-(n)C^T[CP^-(n)C^T + R]^{-1} \quad (5.70)}$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Error Covariance

$$P^{-}(n)\xleftrightarrow{ok}P(n-1) \qquad P(n)\xleftrightarrow{?}P^{-}(n)$$

$$P(n)=Cov\left[x(n)-\hat{x}(n)\right].$$

با استفاده از معادلات (۵.۳۷) و (۵.۳۸) و (۵.۷۰) خواهیم داشت:

$$P(n)=Cov\left[x(n)-\hat{x}^{-}(n)-K(n)\left[Cx(n)+v(n)-C\hat{x}^{-}(n)\right]\right]$$

$$=Cov\left[\left[\left(I-K(n)C\right)\tilde{x}^{-}(n)\right]-K(n)v(n)\right]$$

$$=P^{-}(n)-K(n)CP^{-}(n)-P^{-}(n)C^{T}K^{T}(n) \qquad (5.71)$$

$$+K(n)\left[CP^{-}(n)C^{T}+R\right]K^{T}(n)$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Error Covariance

با جایگزینی رابطه (۵.۷۰) در (۵.۷۱) خواهیم داشت:

$$-P^{-}(n)C^{T}K^{T}(n)+K(n)\left[CP^{-}(n)C^{T}+R\right]K^{T}(n)\overset{(5.70)}{=}0$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad P(n)=P^{-}(n)-K(n)CP^{-}(n) \qquad (5.72)}$$

استخراج معادلات فیلتر کالمن

The *a posteriori* Error Covariance

با جایگزینی رابطه (۵.۷۰) در (۵.۷۱) خواهیم داشت:

$$-P^{-}(n)C^{T}K^{T}(n)+K(n)\left[CP^{-}(n)C^{T}+R\right]K^{T}(n)\overset{(5.70)}{=}0$$

$$\boxed{\Rightarrow\quad P(n)=P^{-}(n)-K(n)CP^{-}(n)\qquad\qquad (5.72)}$$

جمع بندی معادلات فیلتر کالمن

در استفاده از معادلات فیلتر کالمن ابتدا لازم است مقادیر اولیه پارامترهای برگشتی انتخاب گردند. به این منظور:

$$\hat{x}^{-}(0)=E\left[x(0)\right] \qquad (5.73)$$

$$P^{-}(0)=E\left[(x(0)-\hat{x}^{-}(0))(x(0)-\hat{x}^{-}(0))^{T}\right], \qquad (5.74)$$

با توجه به اینکه مقادیر فوق (امید ریاضی ها) در اختیار ما نیستند :

$$\hat{x}^{-}(0)=\textit{guess}\text{ of the value of }\hat{x}^{-}(0)\text{ or of }\mathrm{E}\left[x(0)\right] \qquad (5.75)$$

$$P^{-}(0)=\textit{guess}\text{ of }\mathrm{E}\left[\left(x(0)-\hat{x}^{-}(0)\right)\left(x(0)-\hat{x}^{-}(0)\right)^{T}\right], \qquad (5.76)$$

جمع بندی معادلات فیلتر کالمن

ولیکن (۵.۷۶) تاحدودی دور از دسترس است. اما $P^{-}(0)$ ماتریسی متقارن و مثبت معین است و در بسیاری از مواقع انتخاب زیر کفایت می نماید:

$$P^{-}(0) = \lambda I \qquad \lambda > 0, \qquad (5.77)$$

یا

$$P^{-}(0) = diag(\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m\end{bmatrix}), \quad \lambda_i > 0 \quad \text{for } i = 1,2,\ldots,m \qquad (5.78)$$

معادلات فیلتر کالمن

Measurement Update :

$$K(n) = P^{-}(n)C^{T}\left[CP^{-}(n)C^{T} + R\right]^{-1} \qquad (5.80)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^{-}(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^{-}(n)\right] \qquad (5.81)$$

$$P(n) = P^{-}(n) - K(n)CP^{-}(n) \qquad (5.82)$$

Time Update :

$$\hat{x}^{-}(n+1) = \Phi\hat{x}(n) \qquad (5.83)$$

$$P^{-}(n+1) = \Phi P(n)\Phi^{T} + \Gamma Q\Gamma^{T} \qquad (5.84)$$

کالمن فیلتر ارائه شده برای ***filtering*** ($\hat{x}(n)$) یک مرحله ***prediction*** ($\hat{x}^{-}(n)$) است که به در کل با نام فیلتر کالمن شناخته می شود.

معادلات فیلتر کالمن

نوع دیگری از پیاده سازی فیلتر کالمن با انتخاب شرایط اولیه به صورت زیر صورت می گیرد:

$$\hat{x}(0) = guess \text{ of } \hat{x}(0) \qquad (5.87)$$

$$P(0) = guess \text{ of } E\left[\left(x(0)-\hat{x}(0)\right)\left(x(0)-\hat{x}(0)\right)^T\right] \qquad (5.88)$$

$set: \; n=1$

Time Update:

$$\hat{x}^-(n) = \Phi\hat{x}(n-1)$$

$$P^-(n) = \Phi P(n-1)\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T$$

Measurement Update:

$$K(n) = P^-(n)C^T\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right]$$

$$P(n) = P^-(n) - K(n)CP^-(n)$$

معادلات فیلتر کالمن

نوع دیگری از پیاده سازی فیلتر کالمن با انتخاب شرایط اولیه به صورت زیر صورت می گیرد:

$$\hat{x}(0) = guess \text{ of } \hat{x}(0) \qquad (5.87)$$

$$P(0) = guess \text{ of } E\left[\left(x(0)-\hat{x}(0)\right)\left(x(0)-\hat{x}(0)\right)^T\right] \qquad (5.88)$$

$set: \; n=1$

Time Update:

$$\hat{x}^-(n) = \Phi\hat{x}(n-1)$$

$$P^-(n) = \Phi P(n-1)\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T$$

Measurement Update:

$$K(n) = P^-(n)C^T\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right]$$

$$P(n) = P^-(n) - K(n)CP^-(n)$$

خواص فیلتر کالمن

General Properties:

۱- فیلتر کالمن یک سیستم متغیر بازمان است.

۲- با دسته بندی معادلات فیلتر کالمن، دو دسته معادله مستقل را می توان ارائه نمود:

estimate recursion:

$$K(n) = P^{-}(n)C^{T}\left[CP^{-}(n)C^{T} + R\right]^{-1} \qquad (5.80)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^{-}(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^{-}(n)\right] \qquad (5.81)$$

$$\hat{x}^{-}(n+1) = \Phi\hat{x}(n) \qquad (5.83)$$

Covariance Recursion:

$$K(n) = P^{-}(n)C^{T}\left[CP^{-}(n)C^{T} + R\right]^{-1} \qquad (5.80)$$

$$P(n) = P^{-}(n) - K(n)CP^{-}(n) \qquad (5.82)$$

$$P^{-}(n+1) = \Phi P(n)\Phi^{T} + \Gamma Q\Gamma^{T} \qquad (5.84)$$

خواص فیلتر کالمن

General Properties:

۳- توجه به معادلات ***Recursion Estimate*** نشان دهنده این نکته است که این معادلات وابسته به مشاهدات نیستند و امکان پیش محاسبه کوواریانس خطا و بهره کالمن بدون هیچگونه مشاهده ای وجود دارد.

Riccati Equation:

$$\left.\begin{matrix}(5.84)\\(5.82)\end{matrix}\right\} \rightarrow P^{-}(n+1) = \Phi P^{-}(n)\Phi^{T} - \Phi K(n)CP^{-}(n)\Phi^{T} + \Gamma Q(n)\Gamma^{T}$$

Riccati Equation :

$$\overset{(5.80)}{\Longrightarrow} P^{-}(n+1) = \Phi\left\{P^{-}(n) - P^{-}(n)C^{T}\left[CP^{-}(n)C^{T} + R\right]^{-1}CP^{-}(n)\right\}\Phi^{T} + \Gamma Q(n)\Gamma^{T} \qquad (5.89)$$

خواص فیلتر کالمن

Error Systems

به منظور بررسی پایداری فیلتر کالمن از بررسی خطای تخمین استفاده می شود. لذا:

$$\begin{aligned}E[\tilde{x}(n)] &= E[x(n)-\hat{x}(n)]\\ &= E\left[\Phi x(n-1)+\Gamma(n-1)\omega(n-1)-\Phi\hat{x}(n-1)-K(n)[z(n)-C\Phi\hat{x}(n-1)]\right]\\ &= E\left[\Phi x(n-1)+\Gamma(n-1)\omega(n-1)-\Phi\hat{x}(n-1)\right. \qquad (5.90)\\ &\quad \left.-K(n)\left\{C\left[\Phi x(n-1)+\Gamma(n-1)\omega(n-1)\right]+v(n)-C\Phi\hat{x}(n-1)\right\}\right]\\ &= \left[I-K(n)C\right]\Phi E[\tilde{x}(n-1)]\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(5.83)} E[\tilde{x}(n)] = \left[I-K(n-1)C\right]E[\tilde{x}^{-}(n)] \qquad (5.92)$$

فرم معادل فیلتر کالمن

با استفاده از لم معکوس سازی ماتریس می توان معادلات فیلتر کالمن را به نحو دیگری ارائه نمود که بر اساس آن بتوان *Kalman Smoother* را ساده تر بیان کرده و پایداری فیلتر کالمن را اثبات نمود.

Matrix Inversion Lemma :

$$(A_{11}^{-1}+A_{12}A_{22}A_{21})^{-1} = A_{11}-A_{11}A_{12}(A_{21}A_{11}A_{12}+A_{22}^{-1})^{-1}A_{21}A_{11} \qquad (5.93)$$

$$\begin{aligned}\hat{x}(n) &= [I-k(n)C]P^{-}(n)(P^{-}(n))^{-1}\hat{x}^{-}(n)+K(n)z(n)\\ &= P(n)\left(P^{-}(n))\Phi\hat{x}(n-1)\right)+K(n)z(n) \qquad (5.94)\\ &= P(n)\left[(P^{-}(n))\Phi\hat{x}(n-1)+P^{-1}(n)K(n)z(n)\right]\end{aligned}$$

فرم معادل فیلتر کالمن

از طرفی:

$$P(n)=P^{-}(n)-P^{-}(n)C^{T}[CP^{-}(n)C^{T}+R]^{-1}CP^{-}(n)$$

با استفاده از لم معکوس سازی ماتریس:

$$P^{-1}(n)=(P^{-}(n))^{-1}+(P^{-}(n))^{-1}P^{-}(n)C^{T}\times$$
$$\left[-CP^{-}(n)(P^{-}(n))^{-1}P^{-}(n)C^{T}+\left(CP^{-}(n)C^{T}+R\right)\right]^{-1}CP^{-}(n)(P^{-}(n))^{-1}.$$

با ضرب معادله فوق در $K(n)$:

$$P^{-1}(n)K(n)=\left[(P^{-}(n))^{-1}+C^{T}R^{-1}C\right]P^{-}(n)C^{T}\left[CP^{-}(n)C^{T}+R\right]^{-1}$$
$$=C^{T}[I+R^{-1}CP^{-}(n)C^{T}][CP^{-}(n)C^{T}+R]^{-1}$$
$$=C^{T}R^{-1}[R+CP^{-}(n)C^{T}][CP^{-}(n)C^{T}+R]^{-1}$$
$$=C^{T}R^{-1}.$$

فرم معادل فیلتر کالمن

در نتیجه معادله (۵.۹۴) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\hat{x}(n)=P(n)\left[(P^{-}(n))^{-1}\Phi\hat{x}(n-1)+C^{T}R^{-1}z(n)\right]\qquad(5.95)$$

همچنین :

$$P(n)=P^{-}(n)-P^{-}(n)C^{T}[CP^{-}(n)C^{T}+R]^{-1}CP^{-}(n)$$

با استفاده از لم معکوس سازی ماتریس:

$$P(n)=[(P^{-}(n))^{-1}+C^{T}R^{-1}C]^{-1}\qquad(5.96)$$

معادلات جدید فیلتر کالمن

$$\hat{x}^-(n) = \Phi\hat{x}(n-1) \qquad (5.97)$$

$$P(n) = \left[(P^-(n))^{-1} + C^T R^{-1} C\right]^{-1} \qquad (5.98)$$

$$\hat{x}(n) = P(n)\left[(P^-(n))^{-1}\Phi\hat{x}(n-1) + C^T R^{-1} z(n)\right] \qquad (5.99)$$

$$P^-(n+1) = \Phi P(n)\Phi^T + \Gamma Q(n)\Gamma^T \qquad (5.100)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

فیلتر کالمن با توجه به تغییر و به روز شدن $P^-(n)$ ، $P(n)$ و $K(n)$ ذاتا یک سیستم متغیر با زمان است در هر مرحله به روز می گردد.

در حالیکه برای مدل های سیگنال/مشاهدات نامتغیر بازمان با نویز stationary این مقادیر به حالت ماندگاری می رسند و steady state kalman filter ایجاد می گردد.

با فرض رسیدن به حالت ماندگار و عدم تغییر $P^-(n)$:

$$P_\infty^- = \lim_{n\to\infty} P^-(n) \qquad (5.102)$$

Algebraic Riccati Equation(ARE):

$$(5.89) \Rightarrow P_\infty^- = \Phi\left[P_\infty^- - P_\infty^- C^T\left(CP_\infty^- C^T + R\right)^{-1} CP_\infty^-\right]\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T \qquad (5.103)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

در نتیجه برای P_∞^- حاصل از حل معادله جبری ریکاتی، بهره کالمن و ماتریس کوواریانس خطا به صورت زیر خواهد بود:

$$K_\infty = P_\infty^- C^T (C P_\infty^- C^T + R) \qquad (5.104)$$

$$P_\infty = P_\infty^- - K_\infty C P_\infty^- \qquad (5.105)$$

$$= P_\infty^- - P_\infty^- C^T (C P_\infty^- C^T + R)^{-1} C P_\infty^- \qquad (5.106)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

مثال (۵.۱)(یافتن مدل فضای حالت):

سیگنال WSS، $s(n)$ با تابع خودهمبستگی:

$$R_s(n) = 0.5\delta(n+1) + \delta(n) + 0.5\delta(n-1), \qquad (5.107)$$

$$\xrightarrow{\text{power spectral density}} S_s(z) = 0.5z + 1 + 0.5z^{-1} \qquad (5.108)$$

اندازه گیری سیگنال نیز با حضور نویز سفید $\omega(n)$ با واریانس $\sigma_\omega^2 = 2$ انجام می پذیرد. همچنین سیگنال و نویز غیرهمبسته هستند.

یکی از روش های تعیین مدل فضای حالت، استفاده از تابع چگالی طیفی به صورت

$$S_s(z) = S_s^+(z) S_s^+(z^{-1})$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۱)(یافتن مدل فضای حالت):

و می توان $S_s^+(z)$ را به صورت یک سیستم LTI با ورودی نویز سفید با واریانس واحد در نظر گرفت و با تحقق آن می توان به یک مدل فضای حالت دست یافت.

لذا:

$$S_s(z) = 0.5z + 1 + 0.5z^{-1} \quad = a(1-bz)a(1-bz^{-1}) = a^2[-bz + (1+b^2) - bz^{-1}].$$

درنتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} a^2(1+b^2) = 1 \\ -a^2 b = 0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a^4 - 4a^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow S_s^+(z) = \frac{1+z^{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} z$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال(۵.۱) (یافتن مدل فضای حالت):

با استفاده از تحقق رویتگر:

$$\begin{cases} x'(n+1) = 0x'(n) + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega'(n) \\ s(n) = x'(n) + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega'(n) \end{cases}$$

که $\omega'(n)$ نویز سفید با میانگین ثابت و واریانس واحد را نشان می دهد.

با تعریف بردار حالت جدید به صورت:

$$z(n) \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} s(n) \\ x'(n+1) \end{bmatrix},$$

$$x(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \omega'(n+1)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۱)(یافتن مدل فضای حالت):

با فرض $\omega(n)=\omega'(n+1)$:

$$x(n+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(n)+\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\omega(n)$$

$$s(n)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(n).$$

$$z(n)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(n)+v(n)$$

که $R_v(n)=2\delta(n)$ است، $\omega(n)$ و $v(n)$ ناهمبسته هستند.

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

مثال (۵.۲)(یافتن مدل فضای حالت-۲):

در اینجا روش دوم استخراج یک مدل فضای حالت با استفاده از اطلاعات تابع خود همبستگی و تئوری سیستم های خطی ارائه می گردد.

$$R_s(n)=0.5\delta(n+1)+\delta(n)+0.5\delta(n-1), \qquad (5.107)$$

$$\omega'(n) \longrightarrow \boxed{h(n):\ \text{impulse response}} \longrightarrow s(n)$$

$$\omega':\begin{cases}\textit{white noise}\\ \sigma_\omega^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R_s(n)=h(n)*h(-n)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۲)(یافتن مدل فضای حالت-۲):

اگر $h(n)$ از مرتبه N باشد، $R_s(n)$ از مرتبه $2N\text{-}1$ خواهد بود.

$$(5.107) \rightarrow N=2 \quad \Rightarrow h(n) = a\omega'(n) + b\omega'(n-1)$$

$$\Rightarrow \quad R_s(n) = \begin{cases} a^2+b^2=1, & n=0 \\ ab=1/2 & n=\pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x(n) \triangleq \begin{bmatrix} s(n) \\ \omega'(n) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \omega'(n+1) \\ s(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(n). \end{cases}$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۲)(یافتن مدل فضای حالت-۲):

$$assume: \quad \omega'(n+1) = \omega(n)$$

$$x(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \omega(n) \qquad (5.109)$$

$$s(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(n) \qquad (5.110)$$

$$z(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(n) + v(n) \qquad (5.111)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

مثال (۵.۳)(محاسات در SSKF):

برای SMM مثال (۵.۲):

$$\begin{cases} x(n+1)=\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(n)+\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1\end{bmatrix}\omega(n) & (5.109)\\ s(n)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(n) & (5.110)\\ z(n)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(n)+v(n) & (5.111)\\ R_v(n)=2\delta(n) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} P_\infty^- = \begin{bmatrix}a & c\\ c & b\end{bmatrix} \\ (5.103) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}a & c\\ c & b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{(a+2)b-c^2}{2(a+2)} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/2 & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}.$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۳)(محاسات در SSKF):

$$b=1$$

$$c=1/\sqrt{2}$$

$$a=\frac{(a+2)(1)-(1/\sqrt{2})^2}{2a+4} \Rightarrow 2a^2+2a-7/2=0 \Rightarrow a=-0.5\pm\sqrt{2}$$

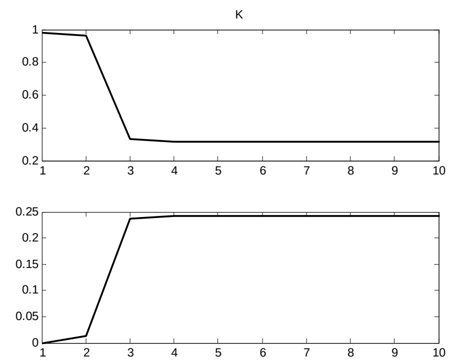
$$\xrightarrow{P_\infty^- >0} a=-0.5+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad P_\infty^- = \begin{bmatrix}\sqrt{2}-0.5 & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0.9142 & 0.7071\\ 0.7071 & 1\end{bmatrix} \qquad (5.112)$$

The Steady State Kalman Filter (SSKF)

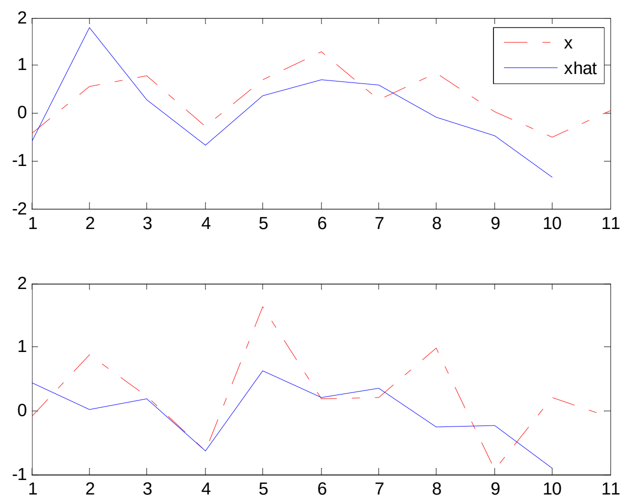
ادامه مثال (۵.۳)(محاسات در SSKF):

$$\xrightarrow{(5.104)} \qquad K_\infty = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}-1/2}{\sqrt{2}+3/2} \\ \dfrac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3/2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.3137 \\ 0.2426 \end{bmatrix}. \qquad (5.113)$$



The Steady State Kalman Filter (SSKF)

ادامه مثال (۵.۳)(محاسات در SSKF):



Input-Output form of Kalman Filter

برای SSKF ، که یک سیستم خطی است:

$$\left.\begin{matrix}(5.81)\\(5.83)\\(5.86)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\hat{x}^-(n+1) = \Phi\left[I - K_\infty C\right]\hat{x}^-(n) + \Phi K_\infty z(n) & (5.114)\\ \hat{s}^-(n) = C\hat{x}^-(n). & (5.115)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad H_{SSKF}(z) = C\left(zI - \Phi[I - K_\infty C]\right)^{-1}\Phi K_\infty. \qquad (5.116)$$

Causal Wiener filter and SSKF

لازم به ذکر است که یک تخمینگر خطی و **causal** منحصر به فرد است.
لذا، می توان گفت دو تخمینگر بالا تقریبا یکی هستند. ولیکن:

$$SSKF: \quad (5.115) \to \hat{s}^-(n) = C\hat{x}^-(n) + 0z(n),$$

$$\to \hat{s}^-(n) = \sum_{i=1}^{n} b(i)z(n-i) \qquad (5.117)$$

$$Causal\ Wiener\ Filter: \quad \hat{s}(n) = \sum_{i=0}^{n} a(i)z(n-i). \qquad (5.118)$$

$$\left.\begin{matrix}(5.117)\\(5.118)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases}b(0) = 0\\ a(0) \neq 0\end{cases} \qquad \begin{cases}SSKF: & \text{one-step prediciotn}\\ C.\ Wiener\ F.: & \text{filtering}\end{cases}$$

Causal Wiener filter and SSKF

مثال (۵.۵) (مقایسه دو تخمینگر در پیش بینی):

برای SMM مثال (۵.۳) دو تخمینگر SSKF و Causal Wiener Filter به صورت زیر خواهند بود:

۱- SSKF:

$$(5.114) \rightarrow \hat{s}^-(n+1) = C\hat{x}^-(n+1) = C\Phi[I - K_\infty C]\hat{x}^-(n) + C\Phi K_\infty z(n).$$

$$\Rightarrow H_{SSKF,pred}(z) = C\Phi(I - K_\infty C)[zI - \Phi(I - K_\infty C)]^{-1}\Phi K_\infty + C\Phi K_\infty$$

$$\xrightarrow[(5.113)]{(5.112)} H_{SSKF,pred}(z) = \frac{0.1716}{1 + 0.1716z^{-1}},$$

Causal Wiener filter and SSKF

ادامه مثال (۵.۵) (مقایسه دو تخمینگر در پیش بینی):

۲-Causal Wiener Predictor:

$$H_{Wiener,pred}(z) = \frac{1}{S_z^+(z)}\left[\frac{zS_{sz}(z)}{S_z^-}\right]_+$$

$$S_z^+(z) = 1.7071(1 + 0.1716z^{-1})$$

$$\left[\frac{zS_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+ = \left[\frac{0.5z + 1 + 0.5z^{-1}}{1.7071(1 + 0.1716z)}\right]_+$$

$$= \left[0.2929 + 1.7029z - \frac{1.1714}{z^{-1} + 0.1716}\right]_+ = 0.2929$$

Causal Wiener filter and SSKF

ادامه مثال (۵.۵) (مقایسه دو تخمینگر در پیش بینی):

:Causal Wiener Predictor-۲

$$\Rightarrow H_{Wiener,pred}(z)=\frac{1}{1.7071(1+0.1716z^{-1})}\times 0.2929=\frac{0.1716}{1+0.1716z^{-1}}.$$

مقایسه دو تابع تبدیل $H_{SSKF,pred}(z)$ و $H_{Wiener,pred}(z)$ نشان از معادل بودن این دو تخمینگر دارد.

Causal Wiener filter and SSKF

مثال (۵.۶) (مقایسه دو تخمینگر در حالت **filtering**):

:SSKF-۱

$$\left.\begin{matrix}(5.83)\\(5.114)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{x}(n)=(I-K_\infty C)\hat{x}^-(n)+K\ z(n).$$

$$\Rightarrow \hat{s}(n)=C\hat{x}(n)=C(I-K_\infty C)\hat{x}^-(n)+CK_\infty z(n),$$

$$\Rightarrow H_{SSKF,pred}(z)=C(I-K_\infty C)[zI-\Phi(I-K_\infty C)]^{-1}\Phi K_\infty+CK_\infty$$

$$Example(5.3)\xrightarrow[(5.113)]{(5.112)}H_{SSKF,filt}(z)=1-\frac{0.6863}{1+0.1716z^{-1}}$$

Causal Wiener filter and SSKF

مثال (۵.۶) (مقایسه دو تخمینگر در حالت filtering):

۱-Causal Wiener Filter:

$$H_{SSKF,filt}(z)=\frac{1}{S_z^+(z)}\left[\frac{S_{sz}(z)}{S_z^-(z)}\right]_+=\frac{1}{S_z^+(z)}\left[\frac{0.5z+1-0.5z^{-1}}{1.7071(1+0.1716z)}\right]_+$$

$$=\frac{1}{S_z^+(z)}\left[0.2929z^{-1}+0.5355+\frac{0.2010}{z^{-1}+0.1716}\right]_+$$

$$=\frac{1}{1.7071(1+0.1716z^{-1})}\times(0.2929z^{-1}+0.5355)$$

$$=1-\frac{0.6863}{1+0.1716z^{-1}}.$$

The SSKF estimator:

دو قضیه ای که در ادامه ارائه می گردند، جایگاه استفاده از SSKF را در SMM های نامتغیر بازمان و با حضور نویز Stationary روشن می کنند:

قضیه ۵.۱: اگر $\sqrt{Q}$ ماتریسی باشد که $\sqrt{Q}\sqrt{Q}^T=Q>0$ و زوج $(\Phi,\Gamma\sqrt{Q})$ پایدارپذیر باشند. آنگاه زوج (Φ,C) آشکارپذیر خواهند بود اگر و فقط اگر:

- SSKF وجود دارد.
- SSKF بدون بایاس خواهد بود.
- P_∞^- یک حل محدود منحصر به فرد مثبت نیمه معین برای معادله ریکاتی (۵.۱۰۳) خواهد بود.
- مقدار P_∞^- مستقل از $P^-(0)\geq 0$ خواهد بود.

The SSKF estimator:

نتیجه قضیه فوق را به منظور سادگی در استفاده از آن به صورت زیر می توان استفاده کرد:

قضیه ۵.۲: اگر $Q>0$ و زوج $\left(\Phi,\Gamma\sqrt{Q}\right)$ کنترل پذیر باشد و زوج $\left(\Phi,C\right)$ رویت پذیر باشد آنگاه:

- **SSKF** وجود دارد.
- **SSKF** بدون بایاس خواهد بود.
- P_∞^- یک حل محدود منحصر به فرد مثبت نیمه معین برای معادله ریکاتی (۵.۱۰۳) خواهد بود.
- مقدار P_∞^- مستقل از $P^-(0)\geq 0$ خواهد بود.

باسمه تعالی

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 6

Innovations

مقدمه

- در فصل قبل فیلتر کالمن به عنوان یک فیلتر برگشتی معرفی گردید.

- در این فصل:
  – معرفی بحث خطای تخمین تحت عنوان ***Innovation***
  – کاربرد ***Innovation*** و اطلاعات موجود در آن در خصوص تخمین
  – امکان بازنویسی فیلتر کالمن بر اساس تعریف ***Innovation***
  – نحوه استفاده از فیلتر کالمن برای **SMM** های متغیر با زمان
  – شرایط واگرایی فیلتر کالمن

The Innovations

- در فیلتر کالمن:

$$\left.\begin{matrix} Z^- = \{z(1) \quad \cdots \quad z(n-1)\} \to \hat{x}^-(n) \\ z(n) \end{matrix}\right\} \to \hat{x}(n)$$

- اطلاعات جدید موجود مشاهده $z(n)$ را ***innovation*** می نامند.
- همچنین اطلاعات جدید موجود در هر مشاهده تشکیل یک سیگنال تصادفی می دهند که به آنها ***innovations*** گویند.
- **innovations** دارای خواص جالب توجهی هستند و دیدگاه جدیدی را نسبت به مساله تخمین ایجاد می نمایند.

The Innovations

- تعریف ***innovations*** :

$$\varepsilon(n) = z(n) - C\hat{x}^-(n) \qquad (6.1)$$
$$= z(n) - \hat{z}^-(n) \qquad (6.2)$$

در این تعریف $\hat{z}^-(n)$ عبارت است از تخمین **LMMSE** از مشاهده $z(n)$ با استفاده از Z^- :

$$\hat{z}^-(n) = C\hat{x}^-(n) \qquad (6.3)$$

با توجه به اینکه:

$$\left.\begin{matrix} z(n) = Cx(n) + v(n) \\ \hat{z}^-(n) = C\hat{x}^-(n) + \hat{v}^-(n) \end{matrix}\right\} \to \hat{v}^-(n) = E\left[v(n)\right] = 0$$

The Innovations

- اطلاعات جدید در ***innovations***:

Innovations حاوی اطلاعات جدیدی از مشاهده $z(n)$ است که به صورت خطی قابل پیش بینی خطی از Z^- نیست.

$$z(n) = \hat{z}^-(n) + \varepsilon(n)$$

- **Orthogonality**:

innovations بر مشاهدات عمود است.

$$\boxed{E\left[\varepsilon(n)z^T(i)\right] = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1. \qquad (6.4)}$$

Proof : $\hat{E}\left[\varepsilon(n)z^T(i)\right] = E\left[(z(n) - \hat{z}^-(n))z^T(i)\right]$

$$= E\left[Cx(n) - v(n) - C\hat{x}^-(n)z^T(i)\right]$$

$$= CE\left[(x(n) - \hat{x}^-(n))z^T(i)\right] - E\left[v(n)z^T(i)\right] = 0 \qquad (6.8)$$

The Innovations

- **Uncorrelatedness/White Noise**:

$$\boxed{E\left[\varepsilon(i)\varepsilon^T(j)\right] = 0 \qquad i \neq j \qquad (6.5)}$$

Proof:

$$E\left[\varepsilon(i)\varepsilon^T(n)\right] = E\left[(z(i) - \hat{z}^-(i))\varepsilon^T(n)\right]$$

$$= E\left[z(i)\varepsilon^T(n)\right] - E\left[(\hat{z}^-(i))\varepsilon^T(n)\right]$$

$$= E\left[(z(i)\varepsilon^T(n)\right] - \sum_{j=1}^{i-1} A_j(j)\mathrm{E}\left[(z(j)\varepsilon^T(n)\right] = 0 \qquad (6.14)$$

The Innovations

- *innovations* حاوی اطلاعات معادل اطلاعات مشاهدات هستند.

$\{z(1) \quad \cdots \quad z(n)\}$: Linear Combination of $\{\varepsilon(1) \quad \cdots \quad \varepsilon(n)\}$

- **Orthogonality** :

innovations **بر مشاهدات عمود است.**

$$E\left[\varepsilon(n)z^T(i)\right]=0, \quad i=1,2,\ldots,n\text{-}1. \qquad (6.4)$$

- **Uncorrelatedness/White Noise:**

$$E\left[\varepsilon(i)\varepsilon^T(j)\right]=0 \qquad i\neq j \qquad (6.5)$$

The Innovations

- تخمین **LMMSE:**

به عنوان نتیجه ای از خواص قبلی

$$\hat{x}(n)=\sum_{j=1}^{n}E\left[x(n)\varepsilon^T(j)\right]\left(E\left[\varepsilon(j)\varepsilon^T(j)\right]\right)^{-1}\varepsilon(j) \qquad (6.6)$$

- **تخمین بازگشتی LMMSE:**

$$\hat{x}(n)=\hat{x}^-(n)+E\left[x(n)\varepsilon^T(n)\right]\left(E\left[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)\right]\right)^{-1}\varepsilon(n) \qquad (6.7)$$

❈ **لازم به ذکر است که مجموعه $\{z(0),\ldots,z(n)\}$ شامل اطلاعات موازی-تکراری است، در حالیکه در مجموعه innovations، $\{\varepsilon(0),\ldots,\varepsilon(n)\}$ چنین اطلاعاتی وجود ندارد.**

بررسی خطا

- کاربرد جالب توجه ***innovations***:

امکان مشاهده و بررسی نحوه عملکرد فیلتر کالمن با استفاده از خاصیت سفید بودن سیگنال *innovations*.

$$\begin{aligned}\varepsilon(n) &= z(n) - \hat{z}^{-}(n) \\ &= x(n) - C\hat{x}^{-}(n)\end{aligned} \qquad (6.28)$$

$\boxed{\varepsilon(n) \text{ should be zero mean white noise}}$

- **البته لازم است** $\hat{x}^{-}(0) = E\left[x(0)\right]$ **باشد تا بدون بایاس بودن تخمین تضمین گردد.**
- **اگر سیگنال** $\varepsilon(n)$ **نویز سفید نباشد لازم است طراحی فیلتر مجددا صورت پذیرد. به عبارت دیگر این امکان وجود دارد که مدل دقیق نبوده باشد یا نویزهای** $\omega(n)$ **و** $v(n)$ **رنگی و/یا correlated باشند.**

Time-varying State Modeled and Non-stationary Noises

- مدل حالت متغیر با زمان:

$$x(n+1) = \Phi(n+1,n)x(n) + \Gamma(n)\omega(n), \quad x(0) = x_0, \qquad (6.29)$$

$$s(n) = C(n)x(n), \qquad (6.30)$$

$$z(n) = s(n) + v(n), \qquad (6.31)$$

که $\Phi(n+1,n)$ **،** $\Gamma(n)$ **و** $C(n)$ **توابع معلوم غیر تصادفی هستند. همچنین:**

$$E\left[\omega(i)\omega^{T}(j)\right] = Q(i)\delta(i-j), \qquad (6.32)$$

$$E\left[v(i)v^{T}(j)\right] = R(i)\delta(i-j), \qquad (6.33)$$

که $Q(n)$ **و** $R(n)$ **توابع معلومی از *n* هستند.**

Time-varying State Modeled and Non-stationary Noises

• کالمن فیلتر برای سیستم متغیر به زمان

***Measurement Update*:**

$$K(n) = P^{-}(n)C^{T}(n)\left[C(n)P^{-}(n)C^{T}(n)+R(n)\right]^{-1} \qquad (6.34)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^{-}(n) + K(n)\left[z(n) - C(n)\hat{x}^{-}(n)\right] \qquad (6.35)$$

$$P(n) = P^{-}(n) - K(n)C(n)P^{-}(n) \qquad (6.36)$$

***Time Update*:**

$$\hat{x}^{-}(n+1) = \Phi(n+1,n)\hat{x}(n) \qquad (6.37)$$

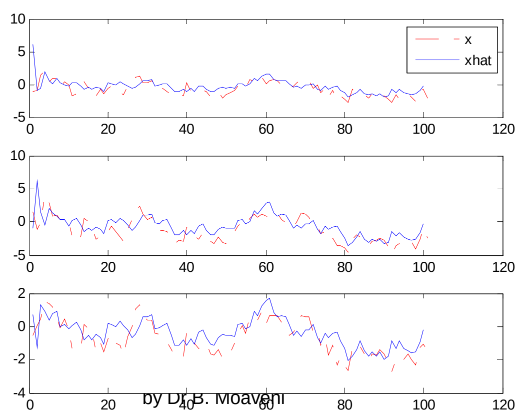
$$P^{-}(n+1) = \Phi(n+1,n)P(n)\Phi^{T}(n+1,n) + \Gamma(n)Q(n)\Gamma^{T}(n) \qquad (6.38)$$

Time-varying State Modeled and Non-stationary Noises

مثال:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 1 \\ 1.2 & 0.4 & -0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = 4, \quad R = diag\left(\begin{bmatrix} 80 & 66 & 25 \end{bmatrix}\right)$$

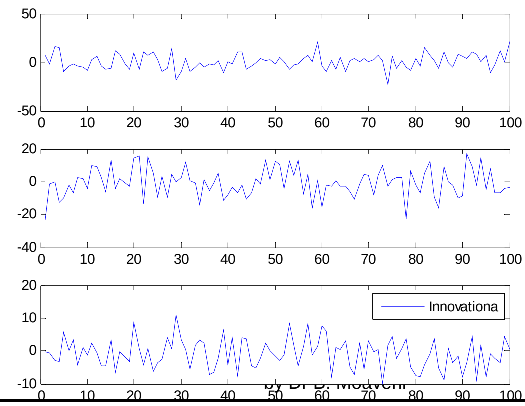


Time-varying State Modeled and Non-stationary Noises

مثال:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 1 \\ 1.2 & 0.4 & -0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = 4, \qquad R = diag\left(\begin{bmatrix} 80 & 66 & 25 \end{bmatrix}\right)$$



13

باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 7

Nonlinear Estimation

مقدمه

- در بخش های قبلی فیلتر کالمن برای SMM های خطی معرفی گشت. ولیکن در بسیاری از موارد SMM ها به صورت غیرخطی بیان می شوند.
- لذا در این بخش به معرفی ***Extended Kalman Filter*** خواهیم پرداخت.

The Extended Kalman Filter

- معرفی SMM غیرخطی

$$\begin{cases} x(n+1) = \phi(x(n)) + \Gamma\omega(n) & (8.1) \\ z(n) = \gamma(x(n)) + v(n) & (8.2) \end{cases}$$

$\omega(n)$: zero mean white noise

$$E\left[\omega(i)\omega^T(j)\right] = Q_{m\times m}\delta(i-j);$$

where, Q: covariance matrix

$v(n)$: zero mean white noise

$$E\left[v(i)v^T(j)\right] = R_{p\times p}\delta(i-j);$$

where, R: covariance matrix

$v(n)$ and $\omega(n)$: uncorrellated

The Extended Kalman Filter

- معرفی SMM غیرخطی

$$\begin{cases} x_{m\times 1}(n+1) = \phi_{m\times 1}(x(n)) + \Gamma\omega(n) & (8.1) \\ z_{p\times 1}(n) = \gamma_{p\times 1}(x(n)) + v(n) & (8.2) \end{cases}$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_m(x) \end{bmatrix} \qquad \gamma(x) = \begin{bmatrix} \gamma_1(x) \\ \gamma_2(x) \\ \vdots \\ \gamma_p(x) \end{bmatrix}$$

$\phi_i(x), \gamma_j(x)$: scalar valued functions

خطی سازی مدل سیگنال/مشاهدات

- با توجه به اینکه فیلتر کالمن مدل خطی سیگنال/مشاهدات را برای تخمین در نظر می گیرد می توان از مدل خطی سازی شده SMM استفاده نمود. لذا:

$$\phi(x(n)) = \phi(\hat{x}(n)) + J_{\phi}(\hat{x}(n))\left[x(n) - \hat{x}(n)\right] + \ldots \qquad (8.3)$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_m(x) \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad J_{\phi}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} \qquad (8.4)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

خطی سازی مدل سیگنال/مشاهدات

- به طور مشابهی برای تابع $\gamma(x(n))$ حول $\hat{x}^{-}(n)$ خواهیم داشت:

$$\gamma(x(n)) = \gamma(\hat{x}^{-}(n)) + J_{\gamma}(\hat{x}^{-}(n))\left[x(n) - \hat{x}^{-}(n)\right] + \ldots \qquad (8.5)$$

- در نتیجه:

$$x(n+1) = \phi(\hat{x}(n)) + J_{\phi}(\hat{x}(n))\left[x(n) - \hat{x}(n)\right] + \Gamma\omega(n) \qquad (8.6)$$

$$z(n) = \gamma(\hat{x}^{-}(n)) + J_{\gamma}(\hat{x}^{-}(n))\left[x(n) - \hat{x}^{-}(n)\right] + v(n) \qquad (8.7)$$

و از این مدل جهت اعمال فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF) استفاده می شود.

The Extended Kalman Filter

- **Time Update:**

مشابه استخراج معادلات فیلتر کالمن در این مرحله تخمین ***a priori*** از $\hat{x}^{-}(n)$ ارائه می گردد:

$$\xrightarrow{\text{Unbiased Estimation}} E\left[x(n)-\hat{x}^{-}(n) \mid Z^{-}\right]=0$$

$$\hat{x}^{-}(n)=E\left[x(n)\middle|Z^{-}\right] \qquad (8.8)$$

$$=E\left[\phi(\hat{x}(n-1))+J_{\phi}(\hat{x}(n-1))\left[x(n-1)-\hat{x}(n-1)\right]+\Gamma\omega(n\text{-}1)\middle|Z^{-}\right] \qquad (8.9)$$

$$\Rightarrow \hat{x}^{-}(n)=\phi(\hat{x}(n-1))+J_{\phi}(\hat{x}(n-1))E\left[x(n-1)-\hat{x}(n-1)\middle|Z^{-}\right]$$

$$+\Gamma E\left[\omega(\text{n-1})\middle|Z^{-}\right]$$

The Extended Kalman Filter

- **Time Update:**

$$\xrightarrow{\text{Unbiased Estimation}} E\left[x(n-1)-\hat{x}(n-1)\middle|Z^{-}\right]=0$$

$$\longrightarrow E\left[\omega(n-1)\middle|Z^{-}\right]=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{x}^{-}(n)=\phi(\hat{x}(n-1))}$$

در بخش به روز رسانی زمانی لازم است تخمین ماتریس کوواریانس شرطی نیز محاسبه گردد. لفظ شرطی به این دلیل اضافه می گردد که از مدل خطی سازی شده و به ازای مشاهدات Z^{-} این ماتریس محاسبه می گردد.

The Extended Kalman Filter

- **Time Update:**

$$P^-(n) = Cov\left[x(n) - \hat{x}^-(n) \middle| Z^- = Z^-\right] \qquad (8.11)$$

$$= E\left[(x(n) - \hat{x}^-(n))(x(n) - \hat{x}^-(n))^T \middle| Z^-\right] \qquad (8.12)$$

$$\Rightarrow \quad P^-(n) = Cov\left[\phi(\hat{x}(n-1)) + J_\phi(\hat{x}(n-1))\tilde{x}(n-1) + \Gamma\omega(n-1) - \hat{x}^-(n) \middle| Z^-\right]$$

$$\Rightarrow \quad P^-(n) = Cov[J_\phi(\hat{x}(n-1))\tilde{x}(n-1) + \Gamma\omega(n-1) | Z^-] \qquad (8.13)$$

با توجه به استقلال خطای تخمین از نویز فرایند خواهیم داشت:

The Extended Kalman Filter

- **Time Update:**

$$\Rightarrow \quad P^-(n) = J_\phi(\hat{x}(n-1)Cov\left[\tilde{x}(n-1) \middle| Z^-\right] J_\phi^T(\hat{x}(n-1)) + \Gamma Q(n-1)\Gamma^T \qquad (8.14)$$

در صورتیکه:

$$P(n) = Cov\left[\tilde{x}(n) \middle| Z\right] = Cov\left[x(n) - \hat{x}(n) \middle| Z\right] \qquad (8.15)$$

آنگاه:

$$\boxed{P^-(n) = J_\phi(\hat{x}(n-1)P(n-1)J_c^T(\hat{x}(n-1)) + \Gamma Q(n-1)\Gamma^T \qquad (8.16)}$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

در این مرحله با فرض بدون بایاس بودن تخمین $\hat{x}^{-}(n)$ و متعامد بودن خطای تخمین $\tilde{x}^{-}(n)$ بر مشاهدات $z(n-1),\ldots,z(2),z(1)$ به دنبال یافتن تخمین $\hat{x}(n)$ به صورت زیر خواهیم بود:

$$\hat{x}(n) = b(n) + K(n)z(n) \qquad (8.17)$$

با توجه به اینکه تخمین $\hat{x}(n)$ بدون بایاس است لذا:

$$E\left[x(n) - \hat{x}(n) \middle| Z\right] = 0$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

با جایگزینی معادلات (۸.۷) و (۸.۱۷) در معادله قبل:

$$E\left[x(n) - b(n) - K(n)\left[\gamma^{-}(\hat{x}^{-}(n)) + J_{\gamma}(\hat{x}^{-}(n))\tilde{x}^{-}(n) + v(n)\right] \middle| Z\right] = 0$$

لازم به ذکر است که $\hat{x}^{-}(n)$ ثابت است چرا که فقط به Z^{-} وابسته است نه به $z(n)$ آخرین مشاهده. در نتیجه:

$$b(n) = E\left[b(n) \middle| Z\right] = -K(n)\gamma(\hat{x}^{-}(n)) - K(n)J_{\gamma}(\hat{x}^{-}(n))E[\tilde{x}^{-}(n) | Z]$$
$$+ E[x(n) | Z] - K(n)E[v(n) | Z] \qquad (8.18)$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

در حالیکه

$$\xrightarrow{Unbiased\ \ Estimation} E[\tilde{x}^{-}(n)|Z]=0$$

$$E[v(n)|Z]=0$$

$$\Rightarrow b(n)=-K(n)\gamma(\hat{x}^{-}(n))+E[x(n)|Z]$$

$$\xrightarrow{(8.8)} \quad b(n)=\hat{x}^{-}(n)-K(n)\gamma(\hat{x}^{-}(n))$$

$$\xrightarrow{(8.17)} \quad \boxed{\hat{x}(n)=\hat{x}^{-}(n)+K(n)[z(n)-\gamma(\hat{x}^{-}(n))] \qquad (8.19)}$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

برای یافتن ماتریس $K(n)$ از اصل تعامد استفاده می شود:

$$E\left[\left(x(n)-\hat{x}(n)\right)z^{T}(i)|Z\right]=0, \quad i=1,\dots,n. \qquad (8.20)$$

$$\xrightarrow{(8.19)} \quad E\left[\left\{x(n)-\hat{x}^{-}(n)-K(n)\left[z(n)-\gamma(\hat{x}^{-}(n))\right]\right\}z^{T}(i)|Z\right]=0, \quad i=1,\dots,n.$$

$$\Rightarrow \quad E\left[\left\{\tilde{x}^{-}(n)-K(n)\left[z(n)-\gamma(\hat{x}^{-}(n))\right]\right\}z^{T}(i)|Z\right]=0, \quad i=1,\dots,n. \quad (8.21)$$

که

$$E\left[\tilde{x}^{-}(n)z^{T}(i)|Z\right]=0, \qquad i=1,2,\dots,n-1$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

لذا برای $i = n$ و با استفاده از رابطه (۸.۷):

$$E\left[\left(\tilde{x}^-(n) - K(n)J_\gamma(\hat{x}^-(n))\tilde{x}^-(n) - K(n)v(n)\right)\right.$$
$$\left.\times \left(\gamma(\hat{x}^-(n)) + J_\gamma(\hat{x}^-(n))\tilde{x}^-(n) - v(n)\right)^T \middle| Z\right] = 0 \qquad (8.22)$$

با توجه به شرط بدون بایاس بودن تخمین و مستقل بودن از مشاهده $z(n)$:

$$E\left[\tilde{x}^-(n) \middle| Z = Z\right] = E\left[\tilde{x}^-(n) \middle| Z^- = Z^-\right] = 0$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

رابطه (۸.۲۲) را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n)) - K(n)J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n)) - K(n)R(n) = 0$$

در نتیجه بهره فیلتر کالمن در ***EKF*** عبارت خواهد بود از:

$$\boxed{K(n) = P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n))\left[J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n)) + R(n)\right]^{-1} \qquad (8.23)}$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

همچنین برای ماتریس کوواریانس شرطی خطا خواهیم داشت:

$$P(n) = Cov\left[x(n) - \hat{x}(n) - K(n)\left[J_\gamma(\hat{x}^-(n))\tilde{x}^-(n) + v(n)\right] \middle| Z\right]$$
$$= P^-(n) - P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n))K^T(n) - K(n)J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n)$$
$$+K(n)\left[J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n)) + R(n)\right]K^T(n) \qquad (8.24)$$

با جایگزینی از رابطه (۸.۲۳) خواهیم داشت:

$$\boxed{P(n) = P^-(n) - K(n)J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n) \qquad (8.25)}$$

The Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

$$K(n) = P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n))[J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n)) + R(n)]^{-1} \qquad (8.26)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)[z(n) - \gamma(\hat{x}^-(n))] \qquad (8.27)$$

$$P(n) = P^-(n) - J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n) \qquad (8.28)$$

- **Time Update:**

$$P^-(n+1) = J_\phi(\hat{x}(n))P(n)J_\phi^T(\hat{x}(n)) + \Gamma Q(n)\Gamma^T \qquad (8.29)$$

$$\hat{x}^-(n+1) = \phi(\hat{x}(n)) \qquad (8.30)$$

The Extended Kalman Filter

مثال

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + \omega(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \dfrac{\rho_0}{2} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) x_3(k) - g + \omega(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \omega(k) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k) + v(k)$$

$\rho_0 = 0.0034$

$g = 32.2$

$\kappa = 32000$

$R = 100$

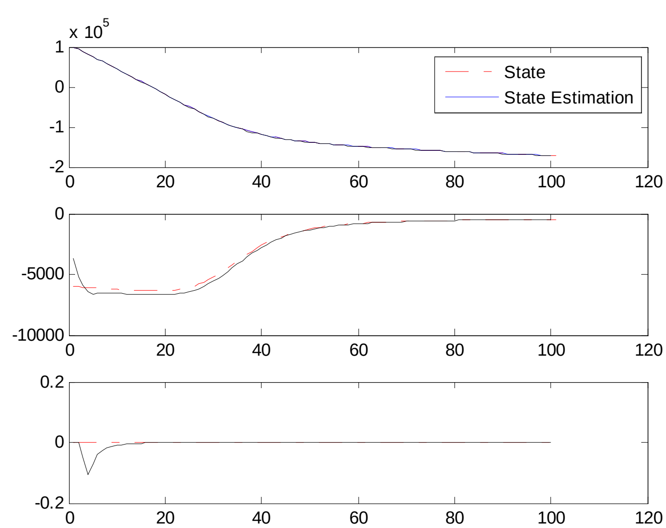
$Q = 0$

$$J_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{\rho_0}{2\kappa} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) x_3(k) & \rho_0 e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2(k) x_3(k) & \dfrac{\rho_0}{2} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_\gamma = [1 \quad 0 \quad 0]$$

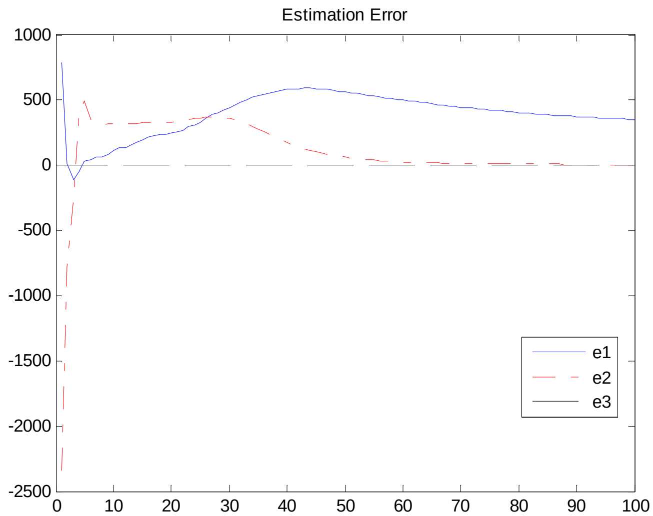
The Extended Kalman Filter

ادامه مثال



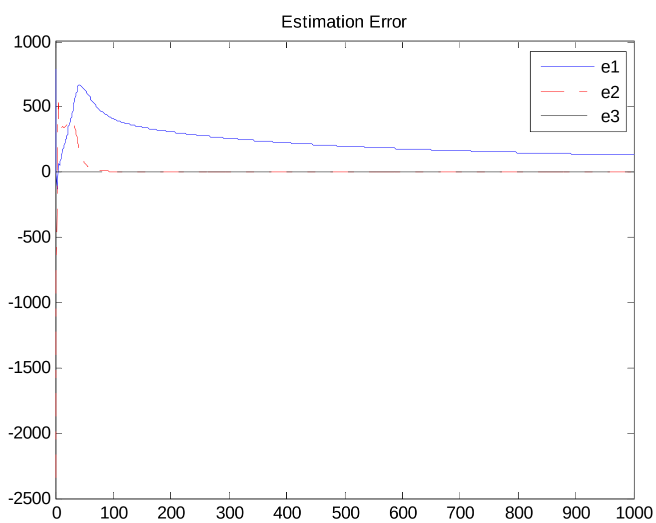
The Extended Kalman Filter

ادامه مثال



The Extended Kalman Filter

ادامه مثال



The Iterated Extended Kalman Filter

- **Measurement Update:**

$$\hat{x}^+(n,0) = \hat{x}^-(n)$$

$$P^+(n,0) = P^-(n)$$

$$K(n) = P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^-(n))[J_\gamma(\hat{x}^+(n,i))P^-(n)J_\gamma^T(\hat{x}^+(n,i)) + R(n)]^{-1}$$

$$\hat{x}^+(n,i+1) = \hat{x}^+(n,i) + K(n)[z(n) - \gamma(\hat{x}^+(n,i))]$$

$$P^+(n,i+1) = P^-(n) - K(n)J_\gamma(\hat{x}^-(n))P^-(n)$$

$$\boxed{i = N}$$

- **Time Update:**

$$P(n) = P^+(n, N+1)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^+(n, N+1)$$

$$P^-(n+1) = J_\phi(\hat{x}(n))P(n)J_\phi^T(\hat{x}(n)) + \Gamma Q(n)\Gamma^T$$

$$\hat{x}^-(n+1) = \phi(\hat{x}(n))$$

The Extended Kalman Filter

مثال

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + \omega(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \dfrac{\rho_0}{2} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) x_3(k) - g + \omega(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \omega(k) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k) + v(k)$$

$$\rho_0 = 0.0034$$

$$g = 32.2$$

$$\kappa = 32000$$

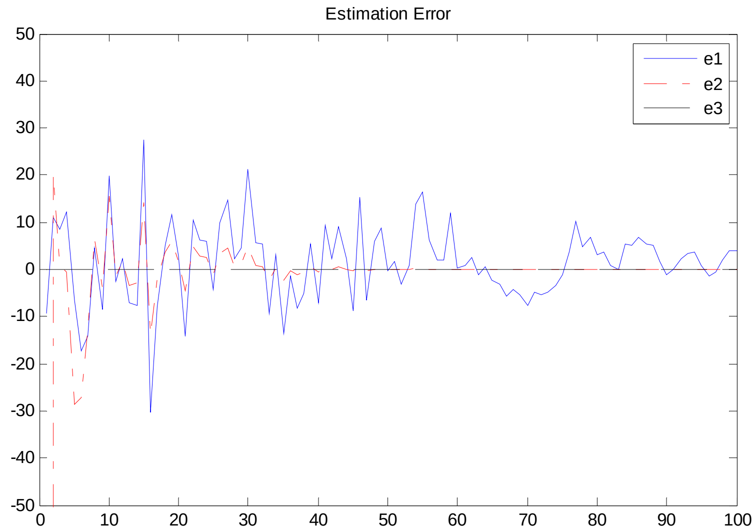
$$R = 100$$

$$Q = 0$$

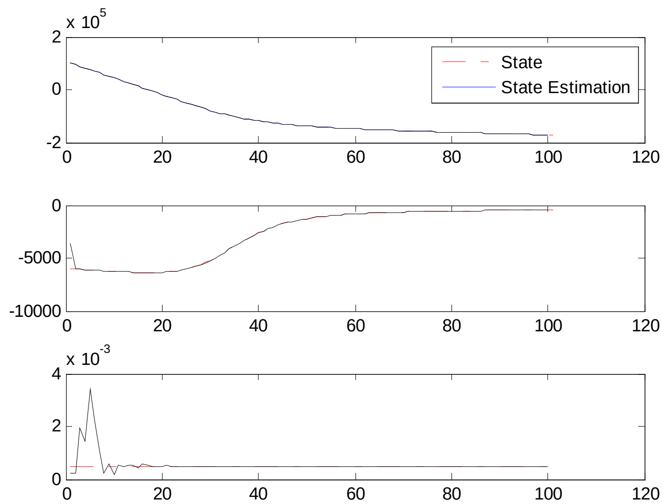
$$J_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{\rho_0}{2\kappa} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) x_3(k) & \rho_0 e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2(k) x_3(k) & \dfrac{\rho_0}{2} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

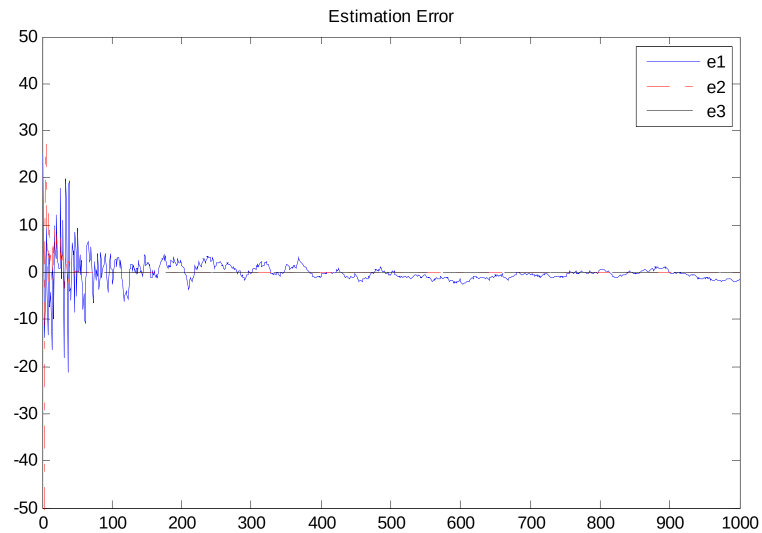
The Iterated Extended Kalman Filter



The Iterated Extended Kalman Filter



The Iterated Extended Kalman Filter



The Unscented Kalman Filter

در فیلتر کالمن توسعه یافته (**EKF**) از خطی سازی با استفاده از دو جمله اول بسط تیلور به منظور تخمین استفاده می شود که این امر موجب می گردد فیلتر کالمن به صورت محلی تخمین صحیحی را ارائه نماید و در حالت کلی مساله تخمین بهینه به یک تخمین زیر بهینه تبدیل می گردد.

به منظور رفع این مشکل فیلتر **UKF**، بر پایه تبدیل **unscented** ارائه می گردد.

The Unscented Kalman Filter

Unscented Transformation (UT)

UT عبارت است از روشی برای محاسبه خواص استاتیکی متغیرهای تصادفی که از یک تابع غیرخطی عبور نموده اند. به این منظور

$$\mathbf{x}_{L\times 1} \rightarrow \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x}_{L\times 1} \rightarrow \begin{cases} mean(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{x}} \\ \operatorname{cov}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{\mathbf{x}} \end{cases}$$

به منظورمحاسبه خواص استاتیکی y ، ماتریس χ شامل $2L+1$ ، sigma vectors χ_i به صورت زیر تعریف می شود:

Unscented Transformation

Unscented Transformation (UT)

$$\chi_0 = \overline{\mathbf{x}}$$

$$\chi_i = \overline{\mathbf{x}} + \left(\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{P}_{\mathbf{x}}}\right)_i, \qquad i = 1,\ldots,L$$

$$\chi_i = \overline{\mathbf{x}} - \left(\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{P}_{\mathbf{x}}}\right)_{i-L}, \qquad i = L+1,\ldots,2L+1$$

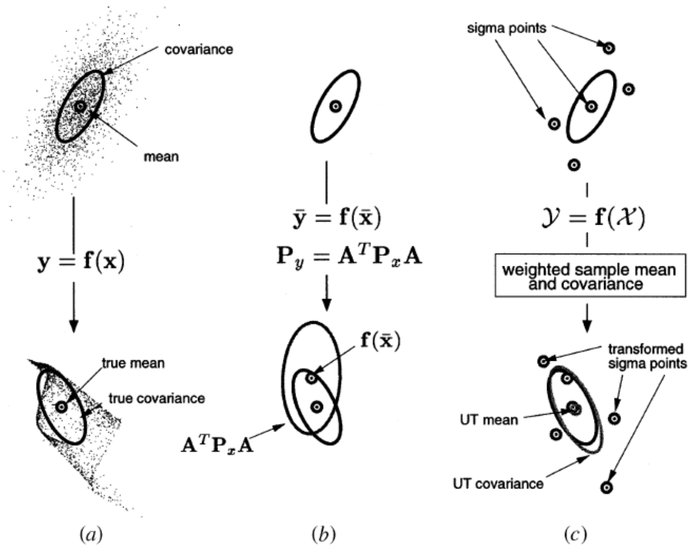
که $\left(\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{P}_{\mathbf{x}}}\right)_i$ عبارت است از ***i***امین ستون از ریشه دوم ماتریس $(L+\lambda)\mathbf{P}_{\mathbf{x}}$ (که از تجزیه Cholesky برای محاسبه آن می توان استفاده نمود.) در این معادلات:

$\lambda = \alpha^2(L+\kappa) - L$: scaling parameter

$10^{-4} \leq \alpha \leq 1$: Determine the spread of sigma point

$\kappa \overset{usually}{=} 3 - L$: Secondary scailing parameter

Unscented Transformation



(a) actual; (b) first-order linearization (EFK); (c) UT.

Unscented Transformation

با نگاشت χ_i ها تحت تابع غیرخطی f :

$$y_i = f(\chi_i)$$

میانگین و کوواریانس $\mathbf{y}$ را با استفاده از توابع زیر می توان تقریب زد:

$$\bar{\mathbf{y}} \approx \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} y_i$$

$$\mathbf{P}_\mathbf{y} \approx \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (y_i - \bar{\mathbf{y}})(y_i - \bar{\mathbf{y}})^T$$

که:

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{L+\lambda}$$

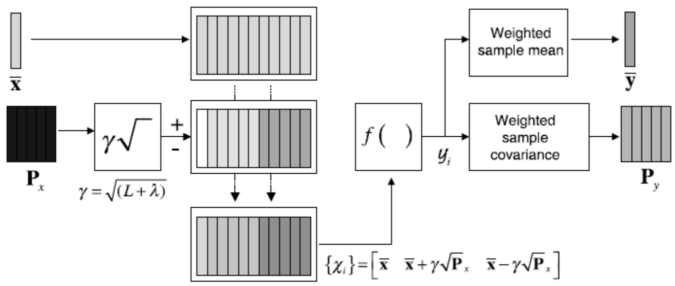
$$W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{L+\lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta$$

$$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{1}{2(L+\lambda)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2L$$

The Unscented Kalman Filter

فیلتر UKF عبارت است ازیک تخمین بازگشتی از UT که

$$\mathbf{x}_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \omega_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} \rightarrow sigma\ matrix : \chi_k^a$$



Block diagram of the UT.

The Unscented Kalman Filter

برای سیستم غیرخطی:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\omega}_k\right) \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{H}\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k\right) \end{cases}$$

و معادلات UKF در حالت کلی عبارت است از:

Initialize with :

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = E\left[\mathbf{x}_0\right]$$

$$\mathbf{P}_0 = E\left[\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\right)\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\right)^T\right]$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^a = E\left[\mathbf{x}^a\right] = E\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_0^a = E\left[\left(\mathbf{x}_0^a - \hat{\mathbf{x}}_0^a\right)\left(\mathbf{x}_0^a - \hat{\mathbf{x}}_0^a\right)^T\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

The Unscented Kalman Filter

$$\text{for} \quad k = 1, 2, \ldots, \infty$$

$$\chi_{k-1}^{a} = \left[\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{a} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{a} + \left(\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{P}_{\mathbf{x}}}\right) \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{a} - \left(\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{P}_{\mathbf{x}}}\right) \right]$$

Time Update:

$$\chi_{k}^{x-} = F(\chi_{k-1}^{x}, \mathbf{u}_{k-1}, \chi_{k-1}^{\omega})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k}^{-} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \chi_{k,i}^{x-}$$

$$\mathbf{P}_{k}^{-} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} \left(\chi_{k,i}^{x-} - \hat{\mathbf{x}}_{k}^{-}\right)\left(\chi_{k,i}^{x-} - \hat{\mathbf{x}}_{k}^{-}\right)^T$$

$$y_{k}^{-} = H(\chi_{k}^{x-}, \chi_{k-1}^{v})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k}^{-} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} y_{k,i}^{-}$$

The Unscented Kalman Filter

Measurement Update:

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_k \tilde{\mathbf{y}}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} \left(y_{k,i}^{-} - \hat{\mathbf{y}}_{k}^{-}\right)\left(y_{k,i}^{-} - \hat{\mathbf{y}}_{k}^{-}\right)^T$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} \left(\chi_{k,i}^{x-} - \hat{\mathbf{x}}_{k}^{-}\right)\left(y_{k,i}^{-} - \hat{\mathbf{y}}_{k}^{-}\right)^T$$

$$\mathrm{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k} \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_k \tilde{\mathbf{y}}_k}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^{-} + \mathrm{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^{-})$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^{-} - \mathrm{K}_k \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_k \tilde{\mathbf{y}}_k} \mathrm{K}_k^T$$

$$\text{where,} \qquad \mathbf{x}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \qquad \chi^a = \begin{bmatrix} \chi^x \\ \chi^\omega \\ \chi^v \end{bmatrix}$$

The UKF additive zero mean noise

معادلات UKF برای نویز جمع شونده عبارت است از:

Initialize with:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = E\left[\mathbf{x}_0\right]$$

$$\mathbf{P}_0 = E\left[\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\right)\left(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0\right)^T\right]$$

for $k = 1, 2, \ldots, \infty$

$$\chi_{k-1} = \left[\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \left(\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{P}_{k-1}}\right) \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1} - \left(\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{P}_{k-1}}\right)\right]$$

The UKF additive zero mean noise

Time Update:

$$\chi_k^{*-} = \mathbf{F}(\chi_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \chi_{k,i}^{*-}$$

$$\mathbf{P}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} \left(\chi_{k,i}^{*-} - \hat{\mathbf{x}}_k^-\right)\left(\chi_{k,i}^{*-} - \hat{\mathbf{x}}_k^-\right)^T$$

augment sigma point:

$$\chi_k^- = \left[\chi_k^{*-} \quad \chi_{k,0}^{*-} + \left(\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{Q}}\right) \quad \chi_{k,0}^{*-} - \left(\sqrt{(L+\lambda)\mathbf{Q}}\right)\right]$$

$$y_k^- = \mathbf{H}(\chi_k^{x-})$$

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} y_{k,i}^-$$

The UKF additive zero mean noise

Measurement Update:

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_k\tilde{\mathbf{y}}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} \left(y_{k,i}^- - \hat{\mathbf{y}}_k^-\right)\left(y_{k,i}^- - \hat{\mathbf{y}}_k^-\right)^T + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} \left(\chi_{k,i}^{x-} - \hat{\mathbf{x}}_k^-\right)\left(y_{k,i}^- - \hat{\mathbf{y}}_k^-\right)^T$$

$$\mathrm{K}_k = \mathbf{P}_{\mathbf{x}_k\mathbf{y}_k}\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_k\tilde{\mathbf{y}}_k}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathrm{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- - \mathrm{K}_k \mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{y}}_k\tilde{\mathbf{y}}_k}\mathrm{K}_k^T$$

The UKF

مثال

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + \omega(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \dfrac{\rho_0}{2} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) x_3(k) - g + \omega(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \omega(k) \end{cases}$$

$$y(k) = x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + v(k)$$

$\rho_0 = 0.0034$

$g = 32.2$

$\kappa = 32000$

$R = 100$

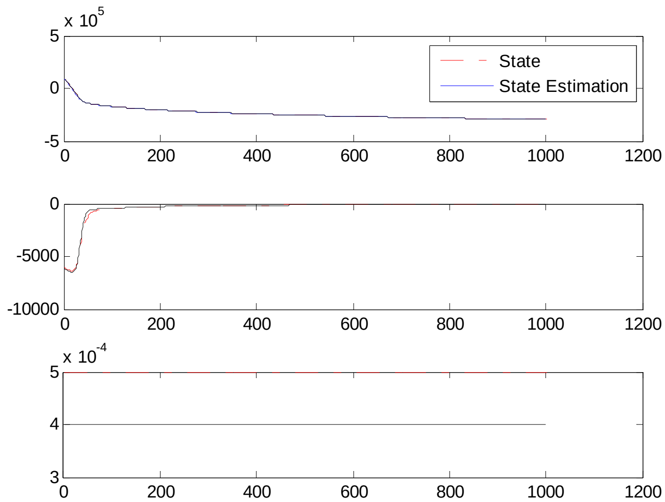
$Q = 0$

$$J_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \dfrac{\rho_0}{2\kappa} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) x_3(k) & \rho_0 e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2(k) x_3(k) & \dfrac{\rho_0}{2} e^{-\frac{x_1(k)}{\kappa}} x_2^2(k) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_\gamma = [1 \quad 0 \quad 0]$$

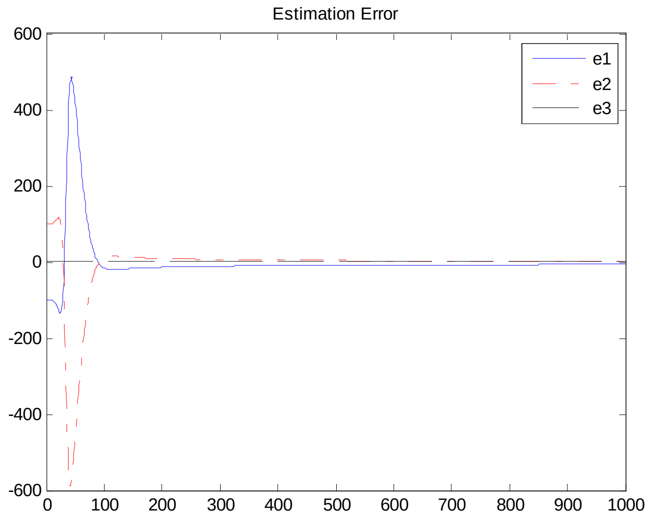
The UKF

مثال



The UKF

مثال



مراجع

The material of this lecture is based on:

[1] E. W. Kamen, J. K. Su, **Introduction to Optimal Estimation.**, Springer, 1999.

[2] Simon Haykin, **Kalman Filtering and Neural Networks**, John Wiley and Sons, 2001.

باسمه تعالی

تئوری تخمین و فیلترهای بهینه

Lecture 8

The correlated noise
Identification
Adaptive Kalman filtering

The Correlated Noises

- در بسیاری از کاربرد ها فرض **uncorrelated** بودن نویز فرایند و نویز اندازه گیری فرض صحیحی نیست به عبارت دیگر:

$v(n)$ and $\omega(n)$: correllated

$$E\left[\omega(i)v(j)\right] = S\delta(i-j)$$

با توجه به اینکه $v(n)$ و $\omega(n)$ نویز سفید هستند این دو سیگنال در تمام زمان ها *correlated* نیستند بلکه در زمان های خاص n آنها *correlated* هستند با ماتریس کوواریانس S.

The Correlated Noises

- معادلاتی از فیلتر کالمن که تغییر نمی کنند:

$$E\left[x(n)v(n)\right]=0 \Longrightarrow$$

Measurement Update:

$$K(n)=P^{-}(n)C^{T}\left[CP^{-}(n)C^{T}+R\right]^{-1} \qquad (5.80)$$

$$\hat{x}(n)=\hat{x}^{-}(n)+K(n)\left[z(n)-C\hat{x}^{-}(n)\right] \qquad (5.81)$$

$$P(n)=P^{-}(n)-K(n)CP^{-}(n) \qquad (5.82)$$

تخمین نویز فرایند:

با توجه به رابطه (۵.۸۳)

$$\xrightarrow{(5.83)} \hat{x}^{-}(n+1)=\Phi\hat{x}(n)+\Gamma\,\underset{?}{\hat{\omega}(n)} \qquad (7.18)$$

The Correlated Noises

به منظور تخمین نویز فرایند مشابه تخمین $x(n)$ می توان از ***innovations*** استفاده نمود. با توجه به تعریف ***innovations*** **:**

$$\varepsilon(n)=z(n)-C\hat{x}^{-}(n)-\hat{v}^{-}(n)\overset{\hat{v}^{-}(n)=0}{=}z(n)-C\hat{x}^{-}(n)$$

مشابه تخمین بازگشتی حالت ها (معادله (۶.۲۲)):

$$\hat{\omega}(n)=\underset{0}{\cancel{\hat{\omega}^{-}(n)}}+E\left[\omega(n)\varepsilon^{T}(n)\right]\left(\mathrm{cov}(\varepsilon(n))\right)^{-1}\varepsilon(n) \qquad (6.22)$$

مجددا مشابه قبل و با توجه به نویز سفید بودن $\omega(n)$:

$$\hat{\omega}^{-}(n)=0$$

The Correlated Noises

همچنین

$$E\left[\omega(n)\varepsilon^T(n)\right] = E\left[\omega(n)\left(Cx(n)+v(n)-C\hat{x}^-(n)\right)\right]$$
$$= E\left[\omega(n)v^T(n)\right] = S$$

و همچنین:

$$E\left[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)\right] = CP^-(n)C^T + R$$

و در نتیجه:

$$\boxed{\hat{\omega}(n) = S\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}\left[z(n)-C\hat{x}^-(n)\right] \qquad (7.20)}$$

The Correlated Noises

با جایگزینی معادله (۷.۲۰)، (۵.۸۰) و (۵.۸۱) در (۷.۱۸):

$$\hat{x}^-(n+1) = \Phi\hat{x}(n) + \Gamma\hat{\omega}(n)$$
$$= \Phi\left(\hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n)-C\hat{x}^-(n)\right]\right)$$
$$+\Gamma S\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}\left[z(n)-C\hat{x}^-(n)\right]$$

و در نتیجه (*a priori estimation*):

$$\hat{x}^-(n+1) = \Phi\hat{x}^-(n) + \underbrace{\left[\Phi P^-(n)C^T + \Gamma S\right]\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}}_{K_c(n)}\left[z(n)-C\hat{x}^-(n)\right]$$

$$\boxed{\hat{x}^-(n+1) = \Phi\hat{x}^-(n) + K_c(n)\left[z(n)-C\hat{x}^-(n)\right] \qquad (7.22)}$$

$K_c(n)$: Kalman gain for correlated noise

The Correlated Noises

و در نتیجه (*a priori error covariance*):

$$\tilde{x}^-(n+1) = \left[\Phi - K_c(n)C\right]\hat{x}^-(n) + \Gamma\omega(n) - K_c(n)v(n)$$

در نتیجه ماتریس کوواریانس خطای تخمین عبارت خواهد بود از:

$$P^-(n+1) = \left[\Phi - K_c(n)C\right]P^-(n)\left[\Phi - K_c(n)C\right]^T + \Gamma Q\Gamma^T + K_c(n)RK_c^T(n)$$
$$-\Gamma SK_c^T(n) - K_c(n)S^T\Gamma^T$$

با جایگزینی $K_c(n)$ خواهیم داشت:

$$\boxed{P^-(n+1) = \Phi P^-(n)\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T - K_c(n)\left[CP^-(n)C^T + R\right]K_c^T(n)}$$

Kalman Filter for the Correlated Noises

در نتیجه معادلات فیلتر کالمن عبارت خواهد بود از:

Measurement Update:

$$K(n) = P^-(n)C^T\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1} \quad (5.80)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right] \quad (5.81)$$

$$P(n) = P^-(n) - K(n)CP^-(n) \quad (5.82)$$

Time Update:

$$K_c(n) = \left[\Phi P^-(n)C^T + \Gamma S\right]\left[CP^-(n)C^T + R\right]^{-1}$$

$$\hat{x}^-(n+1) = \Phi\hat{x}^-(n) + K_c(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right]$$

$$P^-(n+1) = \Phi P^-(n)\Phi^T + \Gamma Q\Gamma^T - K_c(n)\left[CP^-(n)C^T + R\right]K_c^T(n)$$

شناسایی سیستم با استفاده از فیلتر کالمن

برای یک سیستم خطی با معادله تفاضلی:

$$y(n)=\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)+\sum_{i=0}^{M}b_i u(n-i) \qquad M<N \qquad \rightarrow \quad H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{1-\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}$$

هدف بحث شناسایی سیستم: $a_i, b_i = ?$

به منظور فرموله نمودن مساله برای فیلتر کالمن:

$$r(n)\triangleq\begin{bmatrix} y(n-1)\\ \vdots \\ y(n-N)\\ u(n)\\ \vdots \\ u(n-M)\end{bmatrix}, \qquad x(n)\triangleq\begin{bmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_N\\ b_0\\ \vdots \\ b_M\end{bmatrix}$$

شناسایی سیستم با استفاده از فیلتر کالمن

و معادله فضای حالت متناظر عبارت است از:

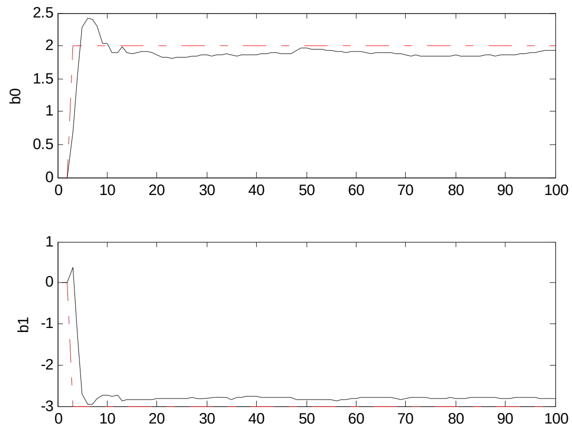
$$\begin{cases} x(n+1)=x(n)\\ y(n)=r^T(n)x(n)+v(n)\end{cases}$$

در این حالت مساله آماده استفاده از فیلتر کالمن است.

شناسایی سیستم با استفاده از فیلتر کالمن

مثال (شناسایی سیستم):

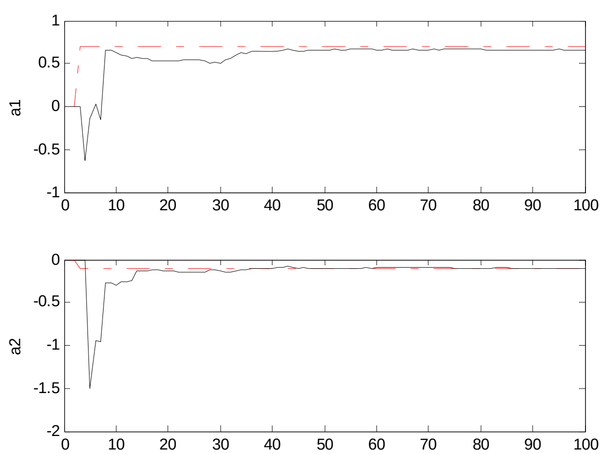
$$H(z)=\frac{2-3z^{-1}}{1-0.7z^{-1}+0.1z^{-2}}$$



شناسایی سیستم با استفاده از فیلتر کالمن

مثال (شناسایی سیستم):

$$H(z)=\frac{2-3z^{-1}}{1-0.7z^{-1}+0.1z^{-2}}$$



تخمین خواص استاتیکی نویز

به منظور استفاده صحیح از فیلتر کالمن در تخمین سیگنال، لازم است خواص استاتیکی نویز فرایند و نویز مشاهدات مشخص باشد.

در این بخش معادلاتی ارائه می گردد که بر اساس آن تخمینی بازگشتی از کوواریانس نویز مشاهدات (R) و نویز فرایند (Q) ارائه می گردد.

تخمین ماتریس کوواریانس نویز مشاهدات (R)

$$\varepsilon(n) = z(n) - C\hat{x}^{-}(n) = C\left(x(n) - \hat{x}^{-}(n)\right) + v(n) = C\tilde{x}^{-}(n) + v(n)$$

$$\Rightarrow \quad S_r(n) = E\left[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)\right] = CP^{-}(n)C^T + R \qquad \text{(R.1)}$$

تخمین خواص استاتیکی نویز

از طرفی:

$$\hat{S}_r(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon(k) - \bar{\varepsilon}\right)^T = \frac{n-1}{n}\hat{S}_r(n-1) + \frac{1}{n}\left(\varepsilon(n) - \bar{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon(n) - \bar{\varepsilon}\right)^T$$

$$\text{where,} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon(k) \qquad \text{(R.2)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \hat{R}(n) = \hat{S}_r(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} CP^{-}(k)C^T}$$

تخمین خواص استاتیکی نویز

تخمین ماتریس کوواریانس نویز فرایند (Q)

$$q(n) = x(n+1) - \hat{x}^-(n+1) = x(n+1) - \Phi\hat{x}(n) = \Phi\left(x(n) - \hat{x}(n)\right) + w(n)$$

$$\Rightarrow \quad S_q(n) = \Phi P(n)\Phi^T + Q \qquad (Q.1)$$

$$q(k) = \hat{x}(k+1) - \hat{x}^-(k+1)$$

$$\hat{S}_q = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(q(k)-\bar{q}\right)\left(q(k)-\bar{q}\right)^T = \frac{n-1}{n}\hat{S}_q(n-1) + \frac{1}{n}\left(q(n)-\bar{q}\right)\left(q(n)-\bar{q}\right)^T$$

$$\text{where,} \quad \bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q(k) \qquad (Q.2)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \hat{Q}(n) = \hat{S}_q(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi P(k)\Phi^T}$$

Adaptive Kalman filtering

Measurement Update:

$$K(n) = P^-(n)C^T\left[CP^-(n)C^T + \hat{R}(n)\right]^{-1} \qquad (5.80)$$

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)\left[z(n) - C\hat{x}^-(n)\right] \qquad (5.81)$$

$$P(n) = P^-(n) - K(n)CP^-(n) \qquad (5.82)$$

Time Update:

$$\hat{x}^-(n+1) = \Phi\hat{x}(n) \qquad (5.83)$$

$$P^-(n+1) = \Phi P(n)\Phi^T + \Gamma\hat{Q}(n)\Gamma^T \qquad (5.84)$$

$$\boxed{\hat{R}(n) = \hat{S}_r(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} CP^-(k)C^T}$$

$$\boxed{\hat{Q}(n) = \hat{S}_q(n) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi P(k)\Phi^T}$$

تخمین خواص استاتیکی نویز

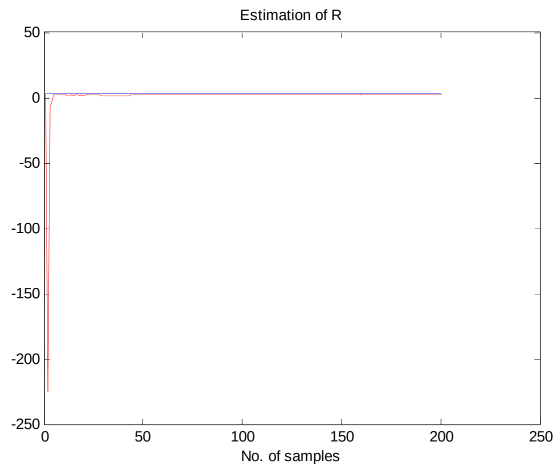
مثال:

$$x(n+1)=\begin{bmatrix}-0.8 & 0.9\\ 0.1 & 0.5\end{bmatrix}+w(n)$$

$$z(n)=\begin{bmatrix}0.4 & 0.1\end{bmatrix}x(n)$$

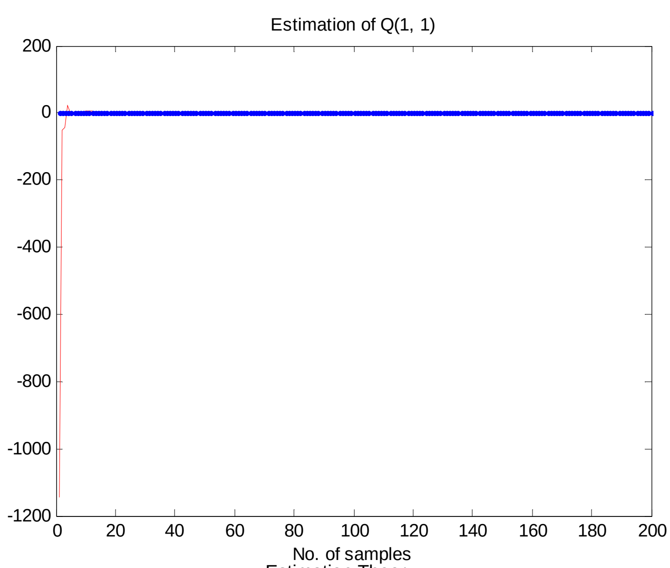
$$Q=\begin{bmatrix}1.6 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$R=3$$



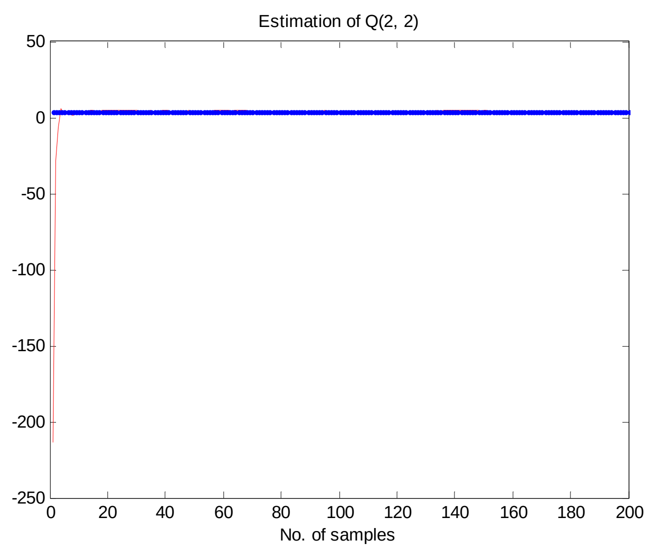
تخمین خواص استاتیکی نویز

ادامه مثال:



تخمین خواص استاتیکی نویز

ادامه مثال:



مراجع

The material of this lecture is based on:

[1] E. W. Kamen, J. K. Su, **Introduction to Optimal Estimation.**, Springer, 1999.

[2] Strenge, **Optimal Control and Estimation.**, 1997.