باسمه تعالی

سیستم های کنترل دیجیتال

بیژن معاونی

(استادیار دانشگاه علم و صنعت ایران)

نیمسال دوم ۸۸-۸۹

باسمه تعالی

سیستم های کنترل دیجیتال

Lecture 1

مقدمه

مقدمه– آشنایی با سیستم های کنترل دیجیتال

کنترل به عنوان ترکیبی از اجزاء ، قوانین و سیستم ها به منظور دست یافتن به پاسخ مطلوب در خروجی سیستم تحت کنترل میباشد.

نتایج مطلوب در کنترل سیستم ها :

- صفر شدن خطای حالت ماندگار
- حذف کردن اثر اغتشاشات
- کاهش اثر نویز
- کاهش حساسیت سیستم نسبت به تغییرات در پارامترها
- افزایش سرعت پاسخ سیستم
- حذف یا کاهش فراجهش

مقدمه– آشنایی با سیستم های کنترل دیجیتال

در سال ۱۹۵۲ اولین کنترل کننده های ورودی بر مبنای سیستم های دیجیتال در دانشگاه MIT ارائه شدند.

سیستم ها را میتوان به دو بخش آنالوگ و دیجیتال تقسیم نمود :

سیستم های دیجیتال :

- ترافیک اینترنتی
- تعداد دانشجویان یک کلاس
- شاخص بورس

سیستم های آنالوگ :

- سیستم های الکترومکانیکی (موتور ، روبات و ...)
- فرآیندهای شیمیایی
- فرآیندهای بیولوژیکی

مقدمه- آشنایی با سیستم های کنترل دیجیتال

کنترل یک تکنولوژی پنهان است که هرگاه مطلوب عمل ننماید مشخص میشود.

ماشین قهوه ساز : دما و فشار (۱-۲ حلقه)
اتوموبیل : (۵-۲۰ حلقه)
هواپیما : کنترل پرواز (۵۰ حلقه)
کنترل فرآیند : سطح ، دما و فشار (بیش از ۱۰۰ حلقه)

و اگر سیستم کنترل درست عمل ننمیاد :

حادثه چرنوبیل (ناپایداری)
سقوط هواپیما (تداخل در سیستم کنترل)

مقدمه- آشنایی با سیستم های کنترل دیجیتال

سوال : چرا از سیستم های کنترل دیجیتال استفاده میکنیم ؟

پاسخ :

- سادگی برنامه ریزی و تنظیم
- الگوریتم های پیچیده را میتوان به سادگی اجرا نمود
- با استفاده از مخابرات دیجیتال و سیستم های از راه دور میتوان کارکرد آنها را تکمیل نمود
- رابطهای با کاربرها بسیار ساده تر و قابل اجرا نمودن است
- کاهش هزینه ها
- افزایش سرعت
- امکان مهندسی مجدد با کمترین هزینه وتغییرات فیزیکی(Re-engineering)

مقدمه– آشنایی با سیستم های کنترل دیجیتال

سوال : مزیت های سیستم های کنترل آنالوگ نسبت به سیستم های کنترل دیجیتال چیست؟

پاسخ :

- **سادگی طراحی اولیه**
- **قابلیت کار در فرکانس های بالا**
- **قابلیت اعتماد بالا برای سیستم های کنترل**

مقدمه– آشنایی با سیستم های کنترل دیجیتال

اهداف دوره :

- **آشنایی با سیستم های زمان گسسته**
- **آشنایی با سیستم های کنترل کامپیوتری**
- **طراحی سیستم های کنترل دیجیتال**

سیگنال آنالوگ :

سیگنال هایی که به صورت پیوسته در زمان تغییر می کنند.

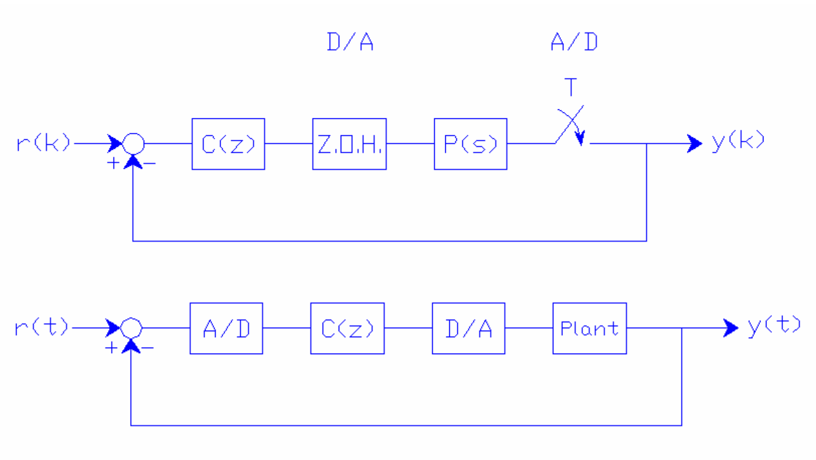
سیگنال گسسته :

سیگنال هایی که فقط به صورت گسسته در زمان تغییر می کنند.

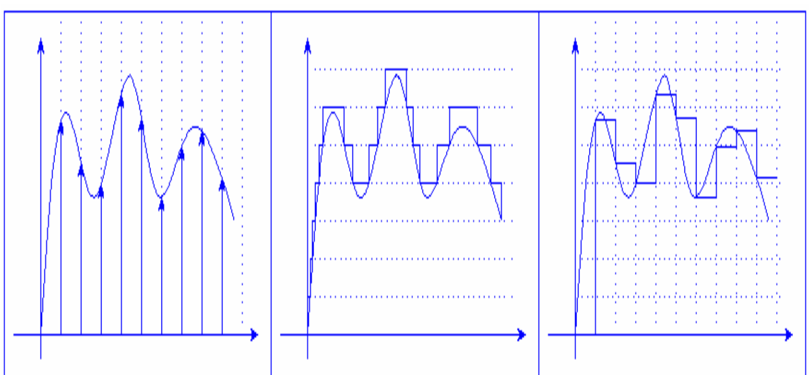
دوره تناوب نمونه برداری :

فاصله زمانی بین دو نمونه گیری در سیستم دیجیتال می باشد.

مقدمه- یک سیستم کنترل دیجیتال نوعی

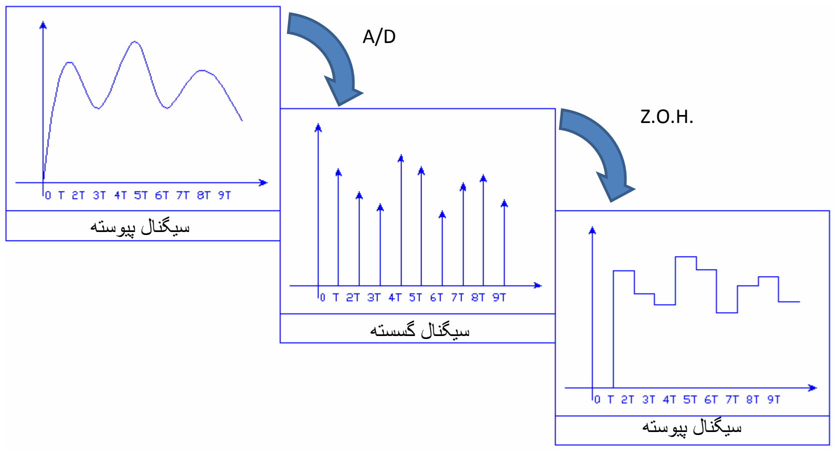


مقدمه



سیگنال دیجیتال	**سیگنال کوانتیزه**	سیگنال گسسته

مقدمه


A/D
Z.O.H.
0 T 2T 3T 4T 5T 6T 7T 8T 9T
سیگنال پیوسته
0 T 2T 3T 4T 5T 6T 7T 8T 9T
سیگنال گسسته
0 T 2T 3T 4T 5T 6T 7T 8T 9T
سیگنال پیوسته

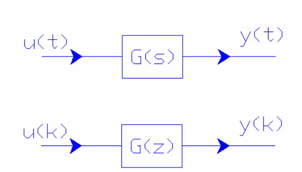
باسمه تعالی

سیستم های کنترل دیجیتال

Lecture 2

سیستم های زمان گسسته و تبدیل Z

مقدمه



$u=\{u(0),u(1),u(2),\ldots,u(k),\ldots\}$

$y=\{y(0),y(1),y(2),\ldots,y(k),\ldots\}$

- سیستم گسسته علی و ثابت نسبت به زمان :

معادله تفاضلی (Difference)

$$y(k)=-a_0y(k-1)-a_1y(k-2)-\ldots-a_ny(k-n)+b_0u(k)+b_1u(k-1)+\ldots+b_mu(k-m)$$

❖ خروجی حال y(t)، به ورودی حال، ورودی گذشته و خروجی گذشته وابسته است.

تبدیل Z:

تبدیل دو طرفه $y(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} y(k).z^{-k} = \sum_{-\infty}^{+\infty} y(kT).z^{-k}$

تبدیل یکطرفه $y(z)=\sum_{0}^{\infty} y(k).z^{-k}$

- مثال :

If $e(k) = 1 \rightarrow E(z) = ?$

$$E(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots \rightarrow E(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1} \qquad |z^{-1}|<1$$

تبدیل Z:

مثال: *تابع نمایی*

$$e(t)=e^{-at} \rightarrow e(kT)=e^{-akT} \Rightarrow E(z)=?$$

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}.z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(e^{-aT}.z^{-1})^{k} = 1+(e^{-aT}.z^{-1})+(e^{-aT}.z^{-1})^{2}+\ldots$$

$$\Rightarrow E(z)=\frac{1}{1-e^{-aT}.z^{-1}} \qquad |e^{-aT}.z^{-1}|<1$$

مثال: *تابع شیب*

$$e(t)=t \rightarrow e(kT)=kT \Rightarrow E(z)=?$$

$$E(z)=\sum_{k=0}^{\infty} kT.z^{-k} = T(\sum_{k=0}^{\infty} k.z^{-k}) = T(z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+\ldots)=$$

$$=Tz^{-1}(1+2z^{-1}+3z^{-2}+\ldots)=Tz^{-1}(\frac{1}{(1-z^{-1})^{2}})=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}$$

خواص تبدیل Z:

❊ خطی بودن

$$Z\left[e_1(k)+ae_2(k)\right]=E_1(z)+aE_2(z)$$

❊ انتقال حقیقی

$$\boxed{Z\left[e(k-n)u(k-n)\right]=z^{-n}.E(z)}$$

$$\boxed{Z\left[e(k+n)u(k+n)\right]=z^{-n}.[E(z)-\sum_{k=0}^{n-1}e(k).z^{-k}]}$$

$$Z\left[e(k-n)u(k-n)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e(k-n).z^{-k}=z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}e(k-n).z^{-(k-n)}$$

$$=z^{-n}\sum_{k=n}^{\infty}e(k-n).z^{-(k-n)}=z^{-n}\sum_{k-n=0}^{\infty}e(k-n).z^{-(k-n)}=z^{-n}.E(z)$$

خواص تبدیل Z:

$$Z\left[e(k+n)u(k+n)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e(k+n).z^{-k}=z^{n}\sum_{k=0}^{\infty}e(k+n)z^{-(k+n)}=$$

$$=z^{n}[\sum_{k+n=n}^{\infty}e(k+n).z^{-(k+n)}+\sum_{k+n=0}^{n-1}e(k+n)z^{-(k+n)}-\sum_{k+n=0}^{n-1}e(k+n)z^{-(k+n)}]=$$

$$=z^{n}(E(z)-\sum_{k+n=0}^{n-1}e(k+n).z^{-(k+n)})=z^{n}(E(z)-\sum_{k=0}^{n-1}e(k)z^{-k})$$

مثال:

$$Z[e(k+1)]=z\left(E(z)-e(0)\right)$$

$$Z[e^{-a(k-3)T}.u(k-3)]=z^{-3}.Z[e^{-akT}]=z^{-3}.\frac{z}{z-e^{-aT}}=\frac{1}{z^{2}(z-e^{-aT})}$$

خواص تبدیل Z:

* انتقال مختلط

$$\boxed{Z\left[e^{ak}.x(k)\right]=X(ze^{-a})}$$

$$Z\left[e^{ak}.x(k)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}e^{ak}.x(k).z^{-k}=x(0)+e^{a}x(1)z^{-1}+e^{2a}x(2)z^{-2}+\dots$$

$$=x(0)+x(1)(e^{-a}.z)^{-1}+x(2)(e^{-2a}.z)^{-2}+\dots = X(e^{-a}.z)$$

مثال:

$$if\ \ x(k)=k \implies X(z)=\frac{z}{(z-1)^2}\quad \text{then}\quad Z[ke^{ak}]=\frac{ze^{-a}}{(ze^{-a}-1)^2}$$

خواص تبدیل Z:

* قضیه مقدار اولیه

$$\boxed{x(0)=\lim_{z\to\infty}E(z)}$$

$$E(z)=e(0)+e(1).z^{-1}+e(2).z^{-2}+\dots$$

* قضیه مقدار نهایی

$$\boxed{x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1).X(z)}$$

$$Z[x(k+1)-x(k)]=\lim_{n\to\infty}[\sum_{k=0}^{n}x(k+1)z^{-k}-\sum_{k=0}^{n}x(k)z^{-k}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[-x(0)+x(1)(1-z^{-1})+x(2)(z^{-1}-z^{-2})+\dots+x(n+1)z^{-n}]$$

$$\lim_{z\to 1}\{Z[x(k+1)-x(k)]\}=\lim_{n\to\infty}[x(n+1)-x(0)]$$

$$\lim_{z\to 1}\{z\left(X(z)-x(0)\right)-x(z)\}=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)=\lim_{n\to\infty}x(n+1)$$

حل معادله تفاضلی:

۱- روش ترتیبی:

مثال:

$$m(k)=x(k)-x(k-1)-m(k-1)\quad , \qquad \mathrm{k}\geq 0$$

$$x(k)=\begin{cases}1 & , \ \mathrm{k:Even}\\ 0 & , \ \mathrm{k:Odd}\end{cases}$$

$$x(-1)=m(-1)=0$$

So:

$$m(0)=x(0)-x(-1)-m(-1)=1-0-0=1$$
$$m(1)=x(1)-x(0)-m(0)=0-1-1=-2$$
$$m(2)=x(2)-x(1)-m(1)=1-0-(-2)=3$$
$$m(3)=x(3)-x(2)-m(2)=0-1-3=-4$$
$$m(4)=x(4)-x(3)-m(3)=0-1-(-4)=5$$
$$\vdots$$

حل معادله تفاضلی:

۲- استفاده از تبدیل Z :

$$m(k)+a_{n-1}m(k-1)+\ldots+a_0m(k-n)=b_nx(k)+b_{n-1}x(k-1)+\ldots+b_0x(k-n)$$
$$M(z)+a_{n-1}z^{-1}M(z)+\ldots+a_0z^{-n}M(z)=b_nX(z)+b_{n-1}z^{-1}X(z)+\ldots+b_0z^{-n}X(z)$$
$$\Rightarrow \frac{M(z)}{X(z)}=\frac{b_n+b_{n-1}z^{-1}+\ldots+b_0z^{-n}}{1+a_{n-1}z^{-1}+\ldots+a_0z^{-n}}$$

مثال:

$$M(z)=X(z)-z^{-1}.X(z)-z^{-1}M(z)\rightarrow \frac{M(z)}{X(z)}=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=\frac{z-1}{z+1}$$

$$x(k)=\begin{cases}1 & , \ \mathrm{k:Even}\\ 0 & , \ \mathrm{k:Odd}\end{cases} \Longrightarrow X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k).z^{-k}=1+x(2).z^{-2}+x(4).z^{-4}+\ldots=\frac{1}{1-z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-1}$$

$$\Rightarrow M(z)=X(z).\frac{z-1}{z+1}=\frac{z^2}{(z-1)(z+1)}.\frac{z-1}{z+1}=\frac{z^2}{(z+1)^2}\quad\rightarrow m(k)=?$$

تبدیل Z معکوس:

❖ به منظور محاسبه ی $m(k)$ به محاسبه تبدیل Z معکوس نیاز است.

مثال:

$$
\begin{array}{l|l}
z^2 & z^2+2z+1 \\
-\left(z^2+2z+1\right) & 1\text{-}2z^{-1}+3z^{-2}-4z^{-3}+5z^{-4} \\
\quad -2z-1 & \\
\quad -\left(-2z-4-2z^{-1}\right) & \\
\qquad 3+2z^{-1} & \\
\qquad -\left(3+6z^{-1}+3z^{-2}\right) & \\
\qquad\quad -4z^{-1}-3z^{-2} & \\
\qquad\quad -\left(-4z^{-1}-8z^{-2}-4z^{-3}\right) & \\
\qquad\qquad 5z^{-2}-4z^{-3} & \\
\qquad\qquad -\left(5z^{-2}-10z^{-3}-5z^{-4}\right) & \\
\qquad\qquad\quad -6z^{-3}-5z^{-4} &
\end{array}
$$

$$\rightarrow M(z)=1\text{-}2z^{-1}+3z^{-2}-4z^{-3}+5z^{-4}+\ldots$$

$$\Rightarrow M(z)=\sum_{k=0}^{\infty} m(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)z^{-k}$$

$$\rightarrow m(k)=(-1)^k(k+1)$$

تبدیل Z معکوس:

۱- روش سری های توانی

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

$$x(z)=\frac{z}{z^2-3z+2}$$

$$
\begin{array}{l|l}
z & z^2-3z+2 \\
-\ z-3+2z^{-1} & z^{-1}+3z^{-2}+7z^{-3}+\ldots \\
\quad +3-2z^{-1} & \\
\quad -\ 3z-9z^{-1}+6z^{-2} & \\
\qquad 7z^{-1}+6z^{-2} & \\
\qquad -\ 7z^{-1}-21z^{-2}+14z^{-3} & \\
\qquad\quad 15z^{-2}-14z^{-3} & \\
\qquad\quad \ldots &
\end{array}
$$

$$\rightarrow x(0)=1, x(1)=1, x(2)=3, x*3)=7,\ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{x(k)=2^k-1}$$

تبدیل Z معکوس:

۲ - استفاده از گسترش به کسرهای جزیی
(مشابه تبدیل لاپلاس عمل میشود)

$$\delta(k-n) \leftrightarrow z^{-n}$$
$$1 \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$
$$k \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$$
$$k^2 \leftrightarrow \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$
$$ka^2 \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2}$$
$$\sin(ak) \leftrightarrow \frac{z\sin(a)}{z^2-2z.\cos(a)+1}$$
$$\cos(ak) \leftrightarrow \frac{z[z-\cos(a)]}{z^2-2z.\cos(a)+1}$$
$$a^k\sin(bk) \leftrightarrow \frac{az\sin(b)}{z^2-2az.\cos(b)+a^2}$$
$$a^k\cos(bk) \leftrightarrow \frac{z^2-az\cos(a)}{z^2-2az.\cos(b)+a^2}$$

تبدیل Z معکوس:

مثال:

$$X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-2}$$

با توجه به روابط مذکور به نظر میرسد که یک ترم z همواره در صورت تبدیل z توابع وجود دارد، برای اینکه بتوانیم از جدول $X(z)/z$ استفاده کنیم صورت را در z ضرب میکنیم.

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}\Rightarrow X(z)=\frac{-z}{z-1}+\frac{z}{z-2}\Rightarrow Z^{-1}[X(z)]=\begin{cases}-1+2^k & k\geq 1\\ 0 & k=0\end{cases}$$

$$Y(z)=z^{-1}.X(z)=\frac{-1}{z-1}+\frac{2}{z-2}\Rightarrow x(k-1)=\begin{cases}-1+2^{k-1} & k\geq 1\\ 0 & k=0\end{cases}$$

تبدیل Z معکوس:

۳- روش انتگرال معکوس ساز

$$e(h) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} E(z).z^{k-1}.dz$$

Γ مسیر بسته ای است که شامل تمام قطب های محدود سیستم میباشد. با توجه به قضیه مانده ها خواهیم داشت :

$$e(k) = \sum_{\text{محل قطب های } E(z)z^{k-1}} \left(\text{مانده } E(z)z^{k-1}\right)$$

مانده در قطب ساده $z=a$:

$$R_{es}|_{z=a} = \lim_{z\to a}\ (z-a)E(z)z^{k-1}$$

مانده در قطب تکراری $z=a$ (mمرتبه):

$$R_{es}|_{z=a} = \lim_{z\to a}\ \frac{1}{(m-1)!}.\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m.E(z)z^{k-1}]$$

تبدیل Z معکوس:

مثال:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

$$x(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^k}{(z-1)(z-2)} + \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^k}{(z-1)(z-2)} = -1+2^k$$

مثال:

$$X(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$$If\ \ k=0 \Rightarrow x(k) = \lim_{z\to 0} z.\frac{1}{(z-1)(z-2)} + \lim_{z\to 1}(z-1).\frac{1}{(z-1)(z-2)} + \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{1}{(z-1)(z-2)} = 0$$

$$if\ \ k\geq 1 \Rightarrow x(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} + \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} = -1+2^{k-1}$$

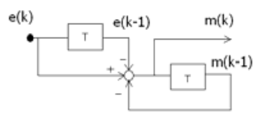
مثال:

$$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

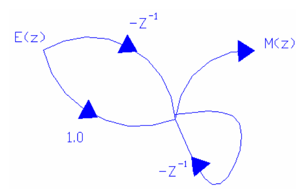
$$\to x(k) = \frac{1}{1!}.\frac{d}{d^2}[(z-1)^2.\frac{z}{(z-1)^2}.z^{k-1}]|_{z=1} = k$$

سیگنال فلوگراف – روش دیگر معرفی سیستم

$$m(k) = e(k) - e(k-1) - m(k-1)$$



بلوک دیاگرام



سیگنال فلوگراف

با استفاده از رابطه میسون :

$$P_1 = 1 \qquad \rightarrow \Delta_1 = 1$$

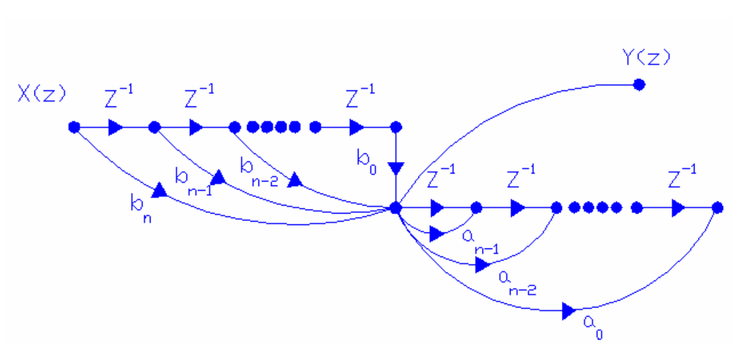
$$P_2 = -Z^{-1} \rightarrow \Delta_2 = 1 \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{M(z)}}{\mathrm{E(z)}} = \frac{\sum P_i . \Delta_i}{\Delta} = \frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} = \frac{z-1}{z+1}$$

$$l_1 = -Z^{-1} \rightarrow \Delta = 1 - l_1$$

سیگنال فلوگراف – روش دیگر معرفی سیستم

لذا برای سیستمی با تابع تبدیل روبرو خواهیم داشت :

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_n + b_{n-1} Z^{-1} + \ldots + b_0 Z^{-n}}{1 + a_{n-1} Z^{-1} + \ldots + a_0 Z^{-n}}$$



مدل فضای حالت و تابع سیستم های گسسته

مدل فضای حالت یک سیستم دیجیتال

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

تبدیل مدل فضای حالت به تابع تبدیل

با فرض $x(0)=0$:

$$G(z) = C[zI - A]^{-1} B + D$$

$$Z[x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)]$$

$$\Rightarrow zx(z) - x(0) = Ax(z) + Bu(z)$$

$$\Rightarrow x(z) = (ZI - A)^{-1}.Bu(z)$$

$$\Rightarrow y(z) = [C(ZI - A)^{-1} B + D].u(z) = G(z).u(z)$$

باسمه تعالی

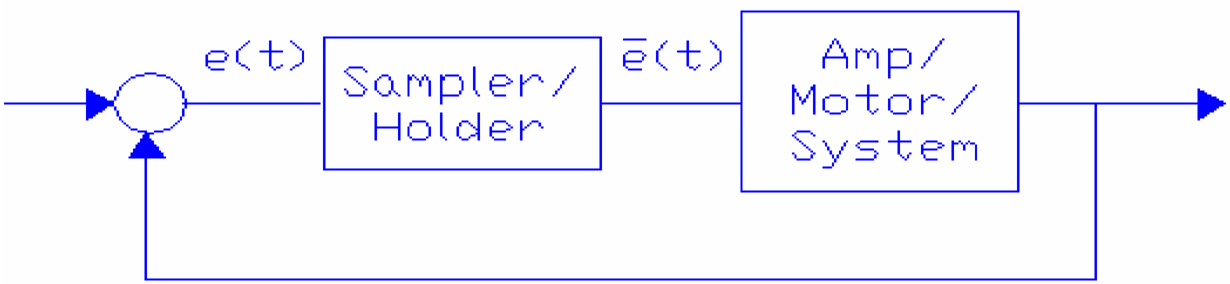
سیستم های کنترل دیجیتال

Lecture 3

نمونه برداری و بازسازی

مقدمه

لزوم وجود تبدیل کننده سیگنال دیجیتال به آنالوگ (Holder)



نگهدارنده

هدف از حضور نگهدارنده بازسازی سیگنال نمونه برداری شده (گسسته) به صورتی است که سیگنال حاصل به سیگنال پیش از نمونه برداری کاملا نزدیک باشد.

- نگهدارنده مرتبه صفر (Zero Order Hold)

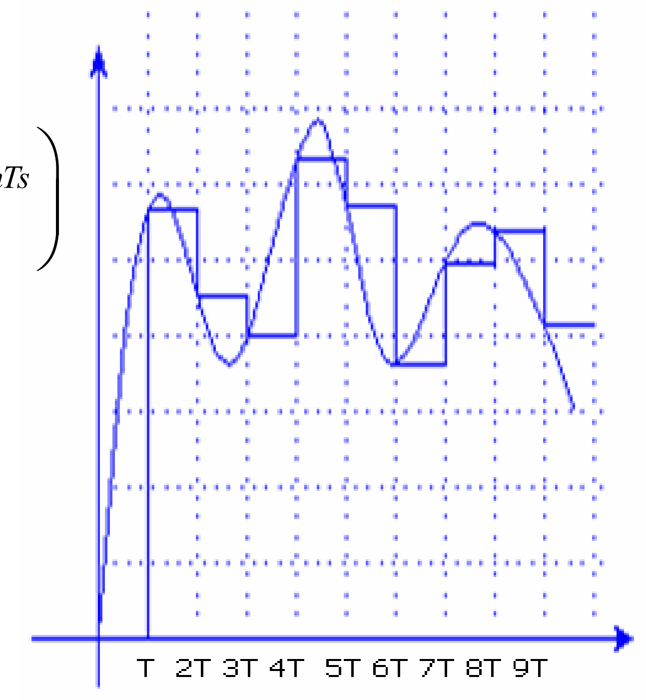
$$\bar{e}(t)=e(0).[u(t)-u(t-T)]+e(T).[u(t-T)-u(t-2T)]+\cdots$$

$$\rightarrow \bar{E}(s)=e(0).[\frac{1}{s}-\frac{e^{-Ts}}{s}]+e(T).[\frac{e^{-Ts}}{s}-\frac{e^{-2Ts}}{s}]+\cdots$$

$$\rightarrow \bar{E}(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}[e(0)+e(T).e^{-Ts}+\cdots]=\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right).\left(\sum_{n=0}^{\infty}e(nT).e^{-nTs}\right)$$

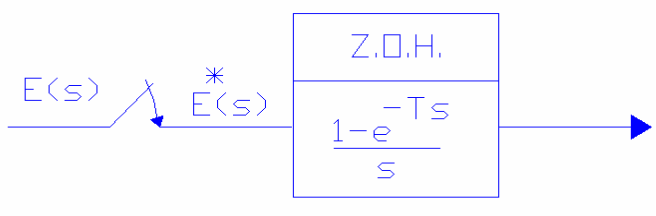
مستقل از سیگنال

تابعی از مقادیر سیگنال و زمان نمونه برداری



نمونه بردار و نگهدارنده

بلوک دیاگرام بخش نمونه بردار و نگهدارنده:



تبدیل ستاره $E(s)$ به صورت $E^*(s)$:

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs}$$

- $E^*(s)$ در سیستم های فیزیکی وجود ندارد.
- این نمونه برداری ایده آل و نگهدارنده بطور واقعی وجود ندارند.

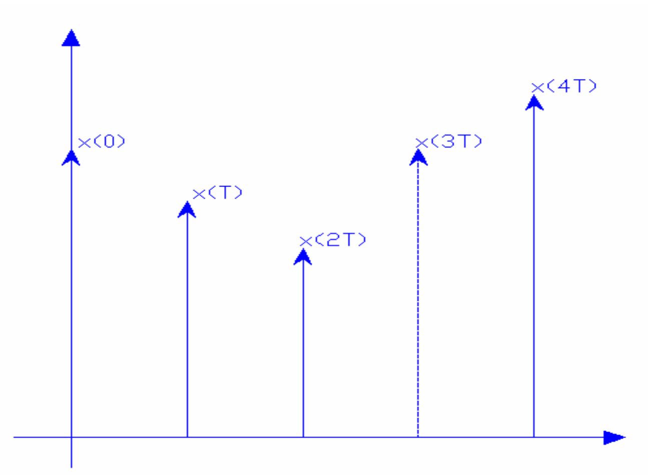
تابع تبدیل نگهدارنده مرتبه صفر:

$$G_{h0}(s) = G_{Z.O.H}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

نمونه بردار

با گرفتن تبدیل لاپلاس معکوس داریم :

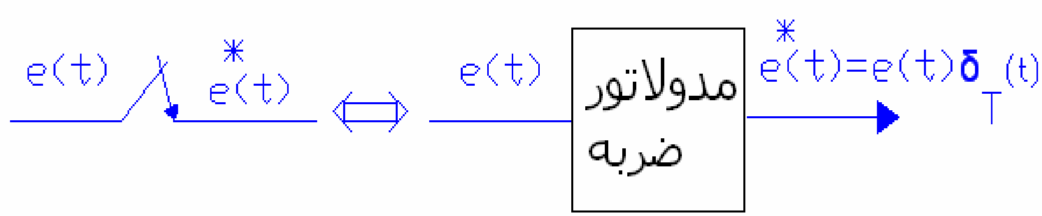
$$e^*(t) = L^{-1}[E^*(s)] = L^{-1}[e(0) + e(T)e^{-Ts} + e(2T)e^{-2T} + \cdots]$$
$$= e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t-T) + e(2T)\delta(t-2T) + \cdots$$



پس $e^*(t)$ عبارت است از قطار ضربه ای با فاصله زمانی T و دامنه سیگنال $e\,(t)$ در زمان آن ضربه

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \;\Rightarrow\; e^*(t) = e(t)\delta_T(t)$$

مدولاتور ضربه :



سیگنال خروجی یک نمونه بردار ایده آل:

$$E^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)e^{-nTs}$$

تبدیل ستاره:

مثال : تبدیل ستاره سیگنال پله $x(t)=u(t)$ را به دست آورید .

$$X^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)e^{-nTs}=1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\ldots=\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

مثال : تبدیل ستاره سیگنال $x(t)=e^{-t}$ را به دست آورید .

$$X^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)e^{-nTs}=1+e^{-T}.e^{-Ts}+e^{-2T}.e^{-2Ts}+\ldots=$$

$$=1+e^{-(1+s)T}+(e^{-(1+s)T})^2+\ldots$$

$$=\frac{1}{1-e^{-(1+s)T}} \qquad |e^{-(1+s)T}|<1$$

تبدیل ستاره:

۳-۴ محاسبه تبدیل ستاره

غیر از دو روش قبل که وابسته به محاسبه یک سری با تعداد جملات نامحدود میباشد، روش های زیر ارایه میگردد:

- ۱
$$X^*(s) = \sum_{\text{قطب هاي } X(\lambda)} (\text{مانده } x(\lambda).\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}})$$
- ۲
$$X^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s+jn\omega_s) + \frac{x(0)}{2} \quad ; \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

- **مثال :**

$$if: \; X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow X^*(s) = ?$$

$$X(\lambda).\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)}.\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}}$$

$$X^*(s) = \frac{1}{1-e^{-T(s+1)}} - \frac{1}{1-e^{-T(s+2)}}$$

تبدیل ستاره:

- مثال :

$$if:\ X(s)=\frac{\beta}{s^2+\beta^2} \leftrightarrow X(t)=\sin(\beta t) \Rightarrow X^*(s)=?$$

$$X^*(s)=\lim_{\lambda\to -j\beta}(\lambda+j\beta)\frac{\beta}{(\lambda+j\beta)(\lambda-j\beta)}\cdot\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}}$$

$$+\lim_{\lambda\to +j\beta}(\lambda-j\beta)\frac{\beta}{(\lambda+j\beta)(\lambda-j\beta)}\cdot\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}}$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{-Ts}e^{j\beta T}}-\frac{1}{1-e^{-Ts}e^{-j\beta T}}\right)=\frac{e^{-Ts}.\sin(\beta T)}{1-2e^{-Ts}.\cos(\beta T)-e^{-2Ts}}$$

$$\cos(\beta t)=\frac{e^{j\beta T}+e-^{j\beta T}}{2j} \qquad \sin(\beta t)=\frac{e^{j\beta T}+e-^{j\beta T}}{2}$$

تبدیل ستاره:

۳-۵ خواص تبدیل ستاره

- ۱- $X^*(s)$ متناوب بوده و دوره تناوب آن برابر $j\omega_s$ است .

$$X^*(s+j\omega_s m)=\sum_{n=0}^{\infty}(x(nT).e^{-nT(s+j\omega_s)})=X^*(s)$$

- ۲- اگر X(s) دارای قطبی در $s=s_1$ باشد، لذا $X^*(s)$ دارای قطب هایی با این مشخصات خواهد بود :

$$s=s_1+jm\omega_s \qquad ; \quad m=(0,\pm1,\pm2,...)$$

$$X^*(s)=\frac{1}{T}[X(s)+X(s+j\omega_s)+X(s+j2\omega_s)+\cdots$$

$$+X(s-j\omega_s)+X(s-j2\omega_s)+\cdots]+\frac{x(0)}{2}$$

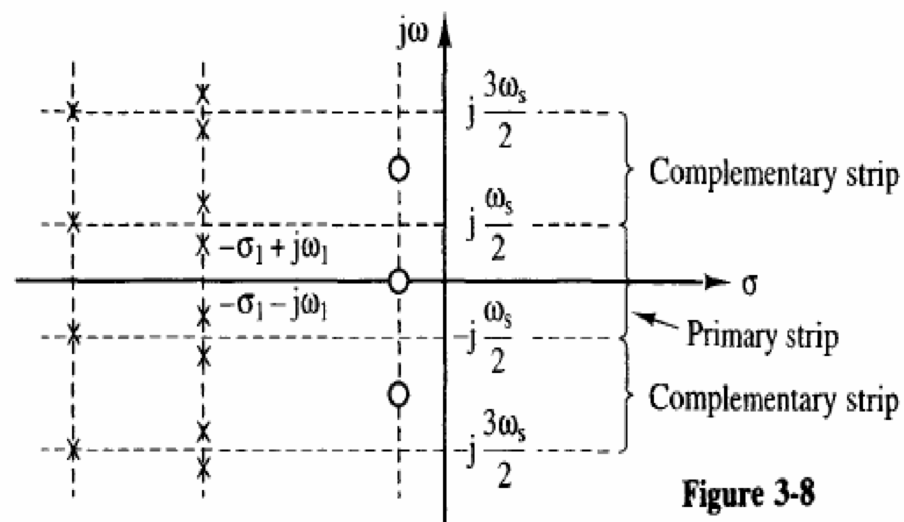
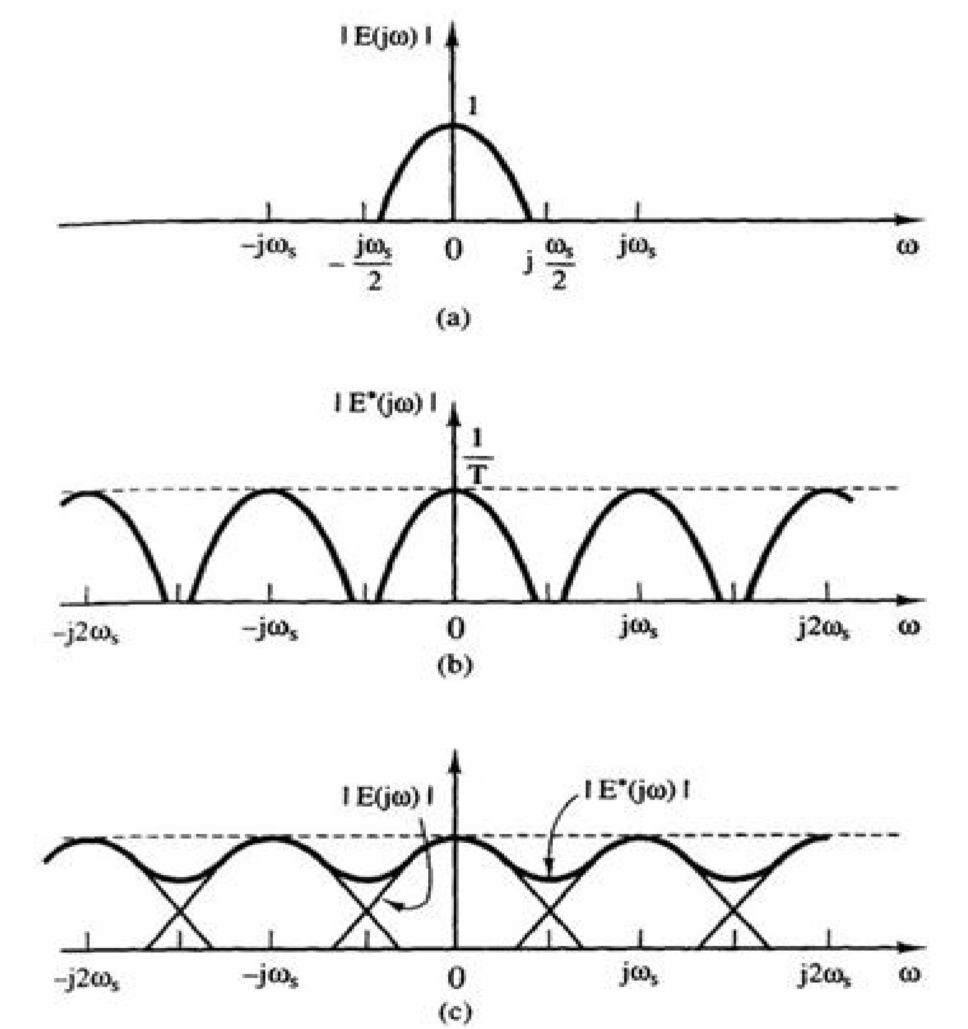


Figure 3-8
$E^*(s)$.

نمونه بردار و نگهدارنده



قضیه شنون :

یک تابع زمانی $x(t)$ که دارای فرکانس های کوچکتر از f_0 هرتز باشد به منظور نمونه برداری لازم است با دوره تناوب حداکثر $\frac{1}{2f_0}$ نمونه برداری شود .

نگهدارنده

۳–۶ بازسازی اطلاعات

- با توجه به شکل پاسخ فرکانسی در اسلاید قبل به منظور بازسازی سیگنال پیوسته با استفاده از طیف فرکانس $E^*(j\omega)$ کاملا مشخص است که با استفاده از یک فیلتر پایین گذر به سادگی این امر امکان پذیر خواهد بود.

اما با توجه به اینکه فیلتر پایین گذر ایده آل وجود ندارد، لازم است که از تقریب هایی استفاده شود. برای این امر از نگهدارنده های اطلاعات به عنوان ابزارهایی برای این تقریب استفاده میشود.

- استفاده از بسط تیلور

یکی از روشهای بازسازی اطلاعات ، استفاده از برون یابی چند جمله ای است. با استفاده از بسط تیلور حول $t=nT$ برای $x(t)$ داریم :

$$x(t) = x(nT) + x'(nT)(t-nT) + x''(nT)\frac{(t-nT)^2}{2!} + \dots$$

$\Rightarrow x_n(T):$ مقـــدار بازســـازي شـــده x(t) در t=nT

$$: x(nT) = x(t) \qquad nT \le t \le (n+1)T$$

نگهدارنده

- حال برای محاسبه مشتق ها لازم است از تفاضل برگشتی استفاده شود :

$$x'(nT)=\frac{1}{T}[x(nT)-x(n-1)T]$$

$$x''(nT)=\frac{1}{T^2}[x(nT)-x(n-1)T-x(n-1)T+x(n-2)T]$$

$$=\frac{1}{T^2}[x(nT)-2x(n-1)T+x(n-2)T]$$

نگهدارنده مرتبه صفر (Z.O.H)

اگر از ترم ثابت از بسط تیلور استفاده شود، نگهدارنده به نام نگهدارنده مرتبه صفر شناخته میشود. در این نوع نگهدارنده مقدار $x(t)$ در بازه های نمونه برداری ها بصورت مقداری ثابت تفریب زده میشود که این مقدار همان مقدار نمونه ی مقدم در آن بازه میباشد.

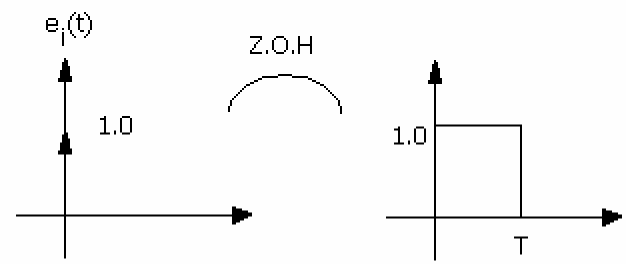
به منظور تحقق $Z.O.H$ به هیچگونه حافظه ای نیاز نیست و ساده ترین نگهدارنده نیز معین $Z.O.H$ میباشد.

$$x(nT)=x(t) \qquad nT\le t\le (n+1)t$$

نگهدارنده مرتبه صفر

$$e(0)=u(t)-u(t-T)\rightarrow E_0(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-Ts}}{s}=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

$$\Rightarrow G_{h0}(s)=\frac{E_0(s)}{E_i(s)}=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$



$$G_{h0}(j\omega)=\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}=\frac{2e^{-j\omega T/2}}{\omega}.\left(\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{2j}\right)$$

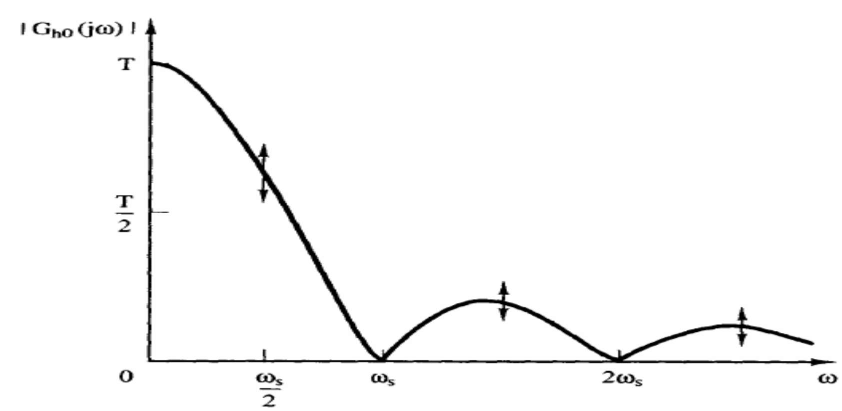
$$=\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}.e^{-j\omega T/2}=T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}.e^{-j\omega T/2}$$

- بررسی پاسخ فرکانسی Z.O.H :

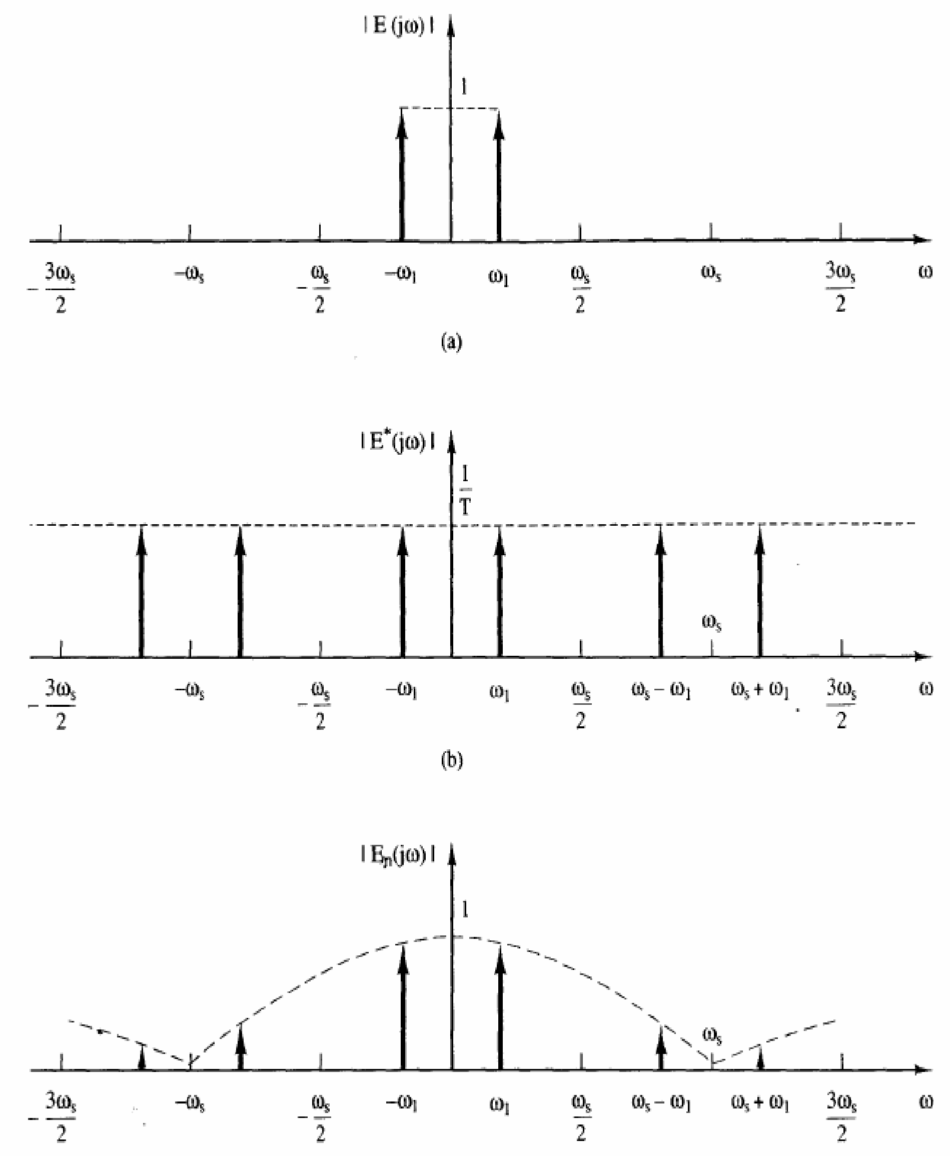
$$\omega T/2=\omega\pi.\frac{1}{2\pi/T}=\frac{\pi\omega}{\omega_s}$$

$$\Rightarrow G_{h0}(j\omega)=T\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s}.e^{-j\pi\omega/\omega_s}$$

$$\Rightarrow|G_{h0}(j\omega)|=T\left|\frac{\sin(\pi\omega/\omega_s)}{\pi\omega/\omega_s}\right|$$



نگهدارنده مرتبه صفر



مثال :

تابع $x(t)=2cos(\omega_1 t)$ را در نظر بگیرید :

$X(s)=?$: فـرض $\omega_1 < \frac{\omega s}{2}$

$$X(j\omega)=\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)=F(2\cos(\omega_1 t))$$

نگهدارنده مرتبه یک (F.O.H)

اگر از دو ترم اول بسط تیلور استفاده شود، نتیجه حاصل تحقق یک نگهدارنده مرتبه اول است.

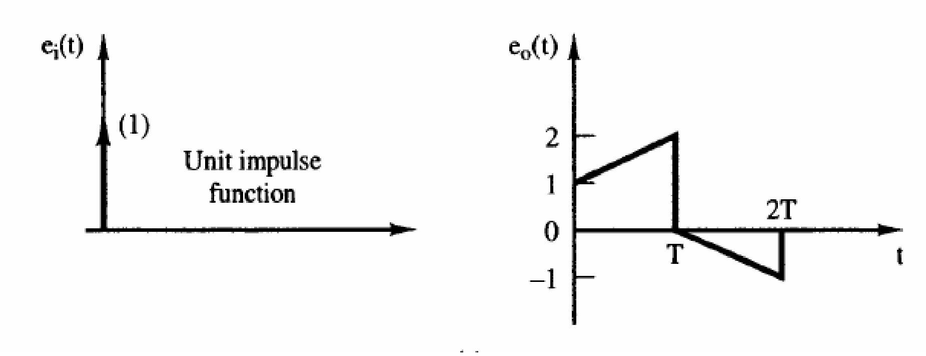
$$x(t) = x(nT) + x'(nT)(t - nT) \qquad nT \le t \le (n+1)T$$

و داریم :

$$x'(nT) = \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T}$$ (نیازمند حافظه است)

$$x_i(t) = \delta(t) \qquad nT \le t \le (n+1)t$$

- به منظور محاسبه تابع تبدیل ***F.O.H*** **تابع ضربه واحد** را در نظر بگیرید؛



نگهدارنده مرتبه یک (F.O.H)

حال برای محاسبه مشتق ها لازم است از تفاضل برگشتی استفاده شود:

$$\Rightarrow x_0(t)=(1+\frac{t}{T})\left[u(t)-u(t-T)\right]+(1+\frac{t}{T})\left[u(t-T)-u(t-2T)\right]$$

$$=u(t)+\frac{t}{T}u(t)-\frac{2t}{T}u(t-T)-u(t-2T)+\frac{t}{T}u(t-2T)$$

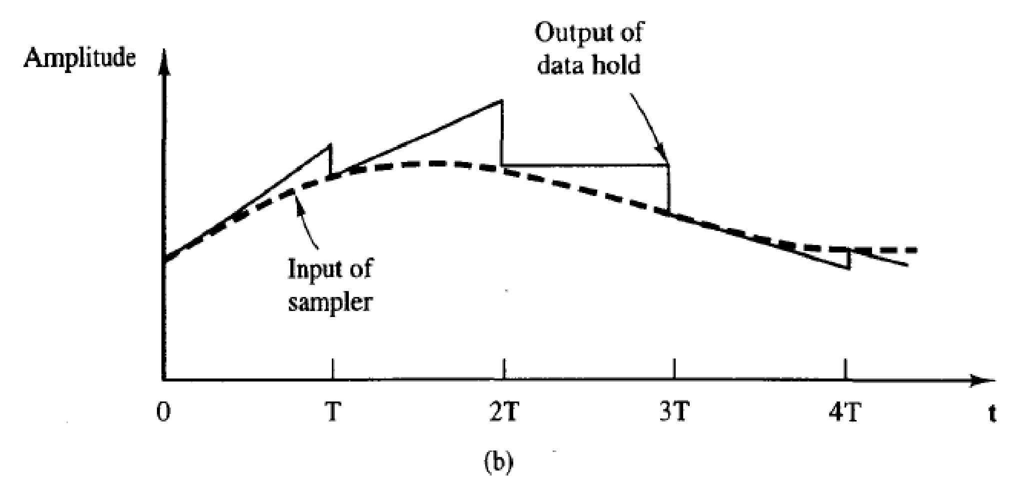
$$=u(t)+\frac{t}{T}u(t)-2u(t-T)-\frac{2}{T}(t-T)u(t-T)+u(t-2T)+\frac{1}{T}(t-2T)u(t-2T)$$

$$\Rightarrow X_0(s)=\frac{1-2e^{-Ts}+e^{-2Ts}}{s}+\frac{1-2e^{-Ts}+e^{-2Ts}}{Ts^2}$$

$$=\frac{(Ts+1)}{T}.(\frac{1-e^{-Ts}}{s})^2$$

$$\Rightarrow G_{h1}(s)=\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{(Ts+1)}{T}.(\frac{1-e^{-Ts}}{s})^2$$

نگهدارنده مرتبه یک (F.O.H)

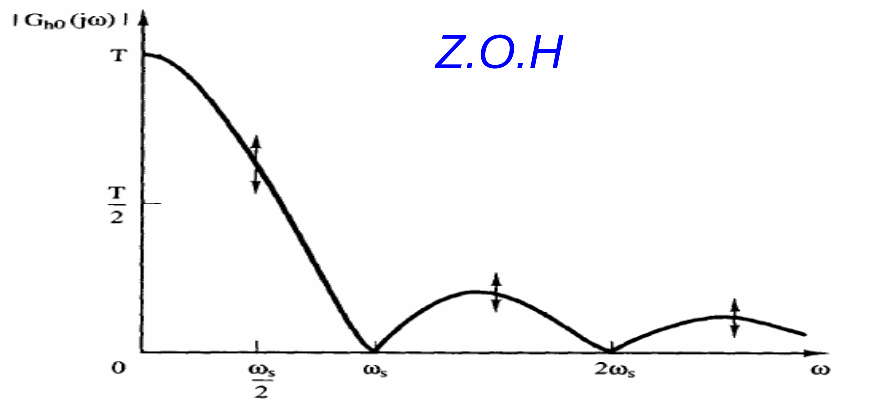


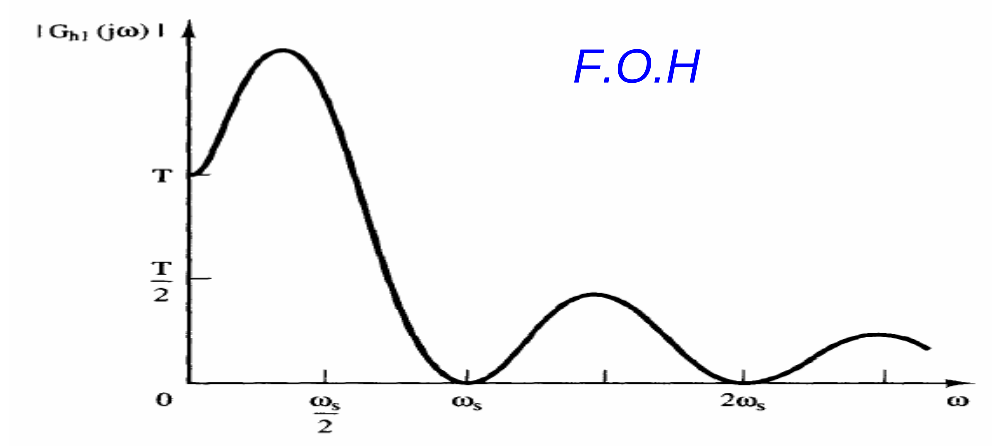
- پاسخ فرکانسی مرتبه یک برای سیستم حلقه باز

$$G_{h1}(s)=\frac{(Ts+1)}{T}.(\frac{1-e^{-Ts}}{s})^2=\frac{(jT\omega+1)}{T}.(\frac{1-e^{-jT\omega}}{j\omega})^2$$

$$\Rightarrow |G_{h1}(j\omega)|=T\sqrt{1+\frac{4\pi^2\omega^2}{\omega_s{}^2}}.[\frac{\sin(\frac{\pi\omega}{\omega_s})}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}}]^2$$

پاسخ فرکانسی نگهدارنده مرتبه صفر و یک

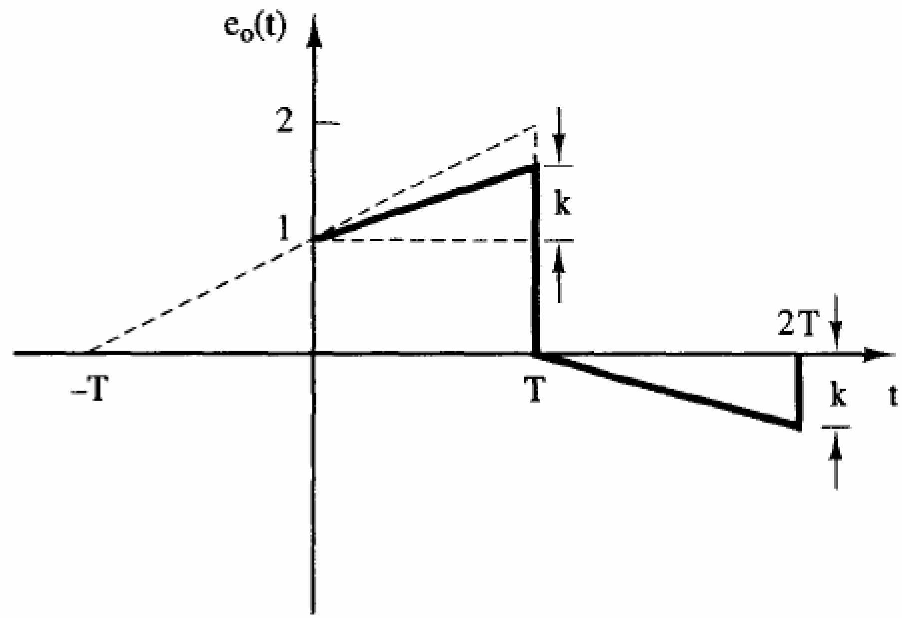




- نگهدارنده مرتبه اول ترکیب بهتری را نسبت به $Z.O.H$ در اختیار قرار میدهد و تقریب بهتری نیز از فیلتر پایین گذر ایده آل است. در فرکانس های بزرگتر $Z.O.H$ تقریب بهتری را در اختیار میگذارد.

- معولا به علت هزینه های پایینتر در اجرا $Z.O.H$ انتخاب میشود.

نگهدارنده مرتبه جزئی



$$\Rightarrow G_{hF} = (1 - ke^{-Ts}).\frac{1-e^{-Ts}}{s} + \frac{k}{Ts^2}(1-e^{-Ts})^2$$

باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

سیستم های کنترل دیجیتال

Lecture 4

سیستم های زمان گسسته حلقه باز و حلقه بسته

تبدیل ستاره و تبدیل Z

۴-۱- ارتباط تبدیل Z و تبدیل ستاره

$$\left.\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \\ X^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)e^{-kTs} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad X(z) = X^*(s)\big|_{e^{Ts}=z}$$

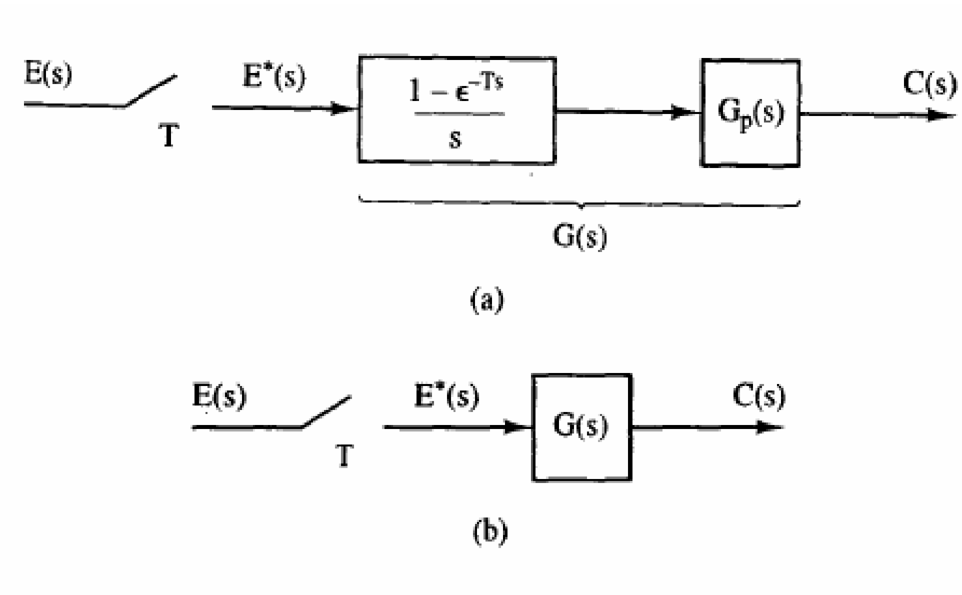
❋ تبدیل **Z** حالت خاص تبدیل لاپلاس است.

- نحوه محاسبه $X(z)$

$$X(z) = \sum_{poles\ of\ X(\lambda)} res\left\{X(\lambda)\frac{1}{1-z^{-1}e^{\lambda T}}\right\}$$

تابع تبدیل پالسی

۴-۲- تابع انتقال (تبدیل) پالسی



$G_p(s)$: تابع تبدیل سیستم

$G(s)$: تابع تبدیل حلقه باز

❊ به عبارت دیگر از این به بعد تابع تبدیل سیستم با تابع تبدیل نگهدارنده ترکیب می شود.

تابع تبدیل پالسی

خروجی سیستم:

$$C(s) = G(s).E^*(s)$$

با فرض اینکه $C(s)$ در تمام زمانهای نمونه برداری پیوسته باشد:

$$C^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C(s+jn\omega_s) = \left\{G(s).E^*(s)\right\}^* \quad \Rightarrow \quad C^*(s) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s+jn\omega_s).E^*(s+jn\omega_s)$$

از آنجاییکه $E^*(s+jn\omega_s)=E^*(s)$ است :

$$\Rightarrow \quad C^*(s) = \frac{1}{T}E^*(s)\sum_{n=-\infty}^{\infty} G(s+jn\omega_s) = E^*(s).G^*(s)$$

$$\xrightarrow{X(z)=X^*(s)|_{e^{Ts}=z}} C(z) = E(z).G(z)$$

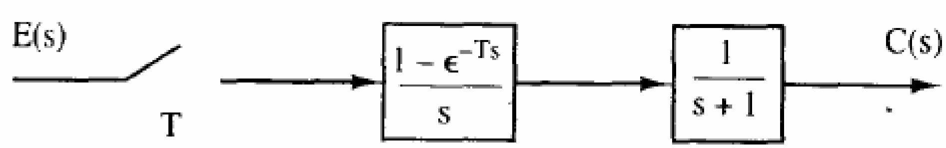
$G(z)$: تابع تبدیل پالسی **Pulse Transfer Function**)
)

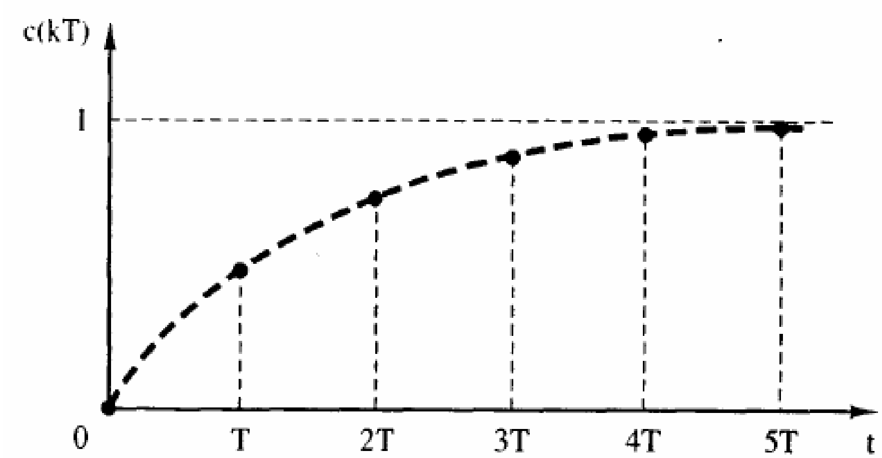
توجه کنید که تابع تبدیل پالسی هیچگونه اطلاعاتی را در خصوص مقدار خروجی مابین زمان های نمونه برداری در اختیار نمی گذارد.

تابع تبدیل پالسی

مثال :

$$\left.\begin{array}{l} A(s)=\dfrac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)}=\underbrace{\left(1-e^{-Ts}\right)}_{F(s)=F^*(s)}\underbrace{\dfrac{1}{s(s+1)}}_{B(s)} \\ \Rightarrow\begin{cases} F(z)=1-z^{-1} \\ B(z)=\dfrac{(1-e^{-T}).z}{(z-e^{-T})(z-1)} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow A(z)=B(z).F(z)=\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$



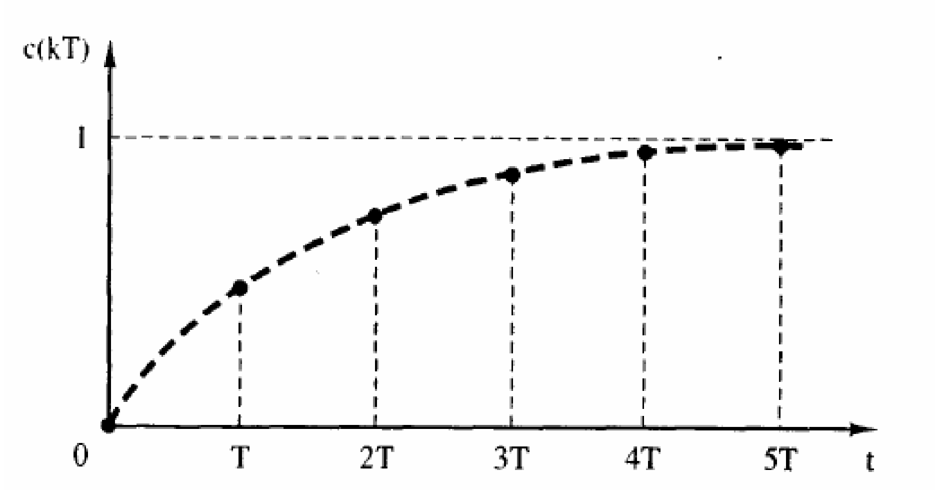


ادامه مثال :

$$G(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)} \rightarrow G(z)=\frac{1-e^{-T}}{Z-e^{-T}}$$

$$C(z)=E(z).G(z) \qquad \Rightarrow C(z)=\frac{z.(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$E(z):$ ورودي پلــه $\Rightarrow E(z)=\dfrac{z}{z-1}$



$$C(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}} \Rightarrow C(nT)=1-e^{-nT}$$

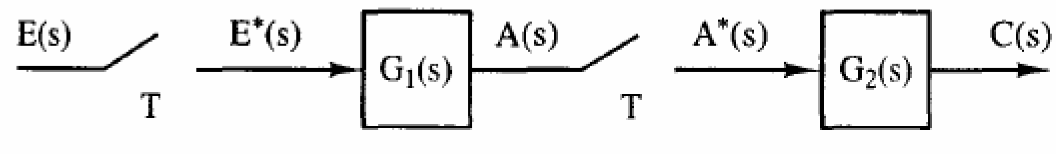
$$c_{ss}(k)=\lim_{z\to 1}(z-1).C(z)=\lim_{z\to 1}(z-1).G(z).E(z)=\lim_{z\to 1}(z-1).\frac{z}{z-1}.G(z)=G(1) \quad : \quad \text{dc Gain}$$

$$\text{dc Gain}=\lim_{z\to 1}G(z)=\lim_{s\to 0}G_p(s)=1$$

توجه: نمونه بردار و نگهدارنده تاثیری بر پاسخ حالت ماندگار خروجی ندارد.

سیستم های حلقه باز و تابع تبدیل های پالسی متناظر

سیستم های حلقه باز با ساختار متفاوت :

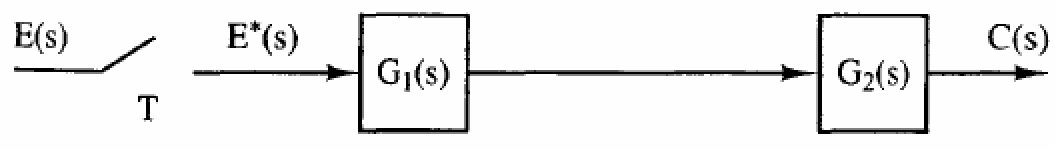


(a)

$$C(s) = G_2(s)A^*(s) \quad \rightarrow \quad C(z) = G_2(z)A(z)$$

$$A(s) = G_1(s)E^*(s) \rightarrow A(z) = G_1(z)E(z)$$

$$\Rightarrow \; C(z) = G_1(z)G_2(z)E(z)$$

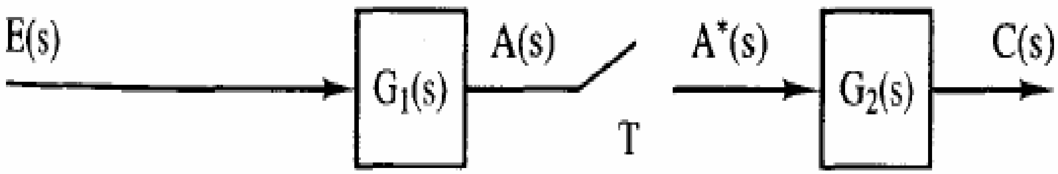


(b)

$$C(s) = G_1(s)G_2(s)E^*(s)$$

$$\Rightarrow C(z) = \overline{G_1G_2}(z)E(z)$$

سیستم های حلقه باز و تابع تبدیل های پالسی متناظر



(c)

$$C(s) = G_2(s)A^*(s) \quad \rightarrow \quad C(z) = G_2(z)A(z)$$

$$A(s) = G_1(s)E(s) \rightarrow A(z) = \overline{G_1E}(z)$$

$$\Rightarrow C(z) = G_2(z)\overline{G_1E}(z)$$

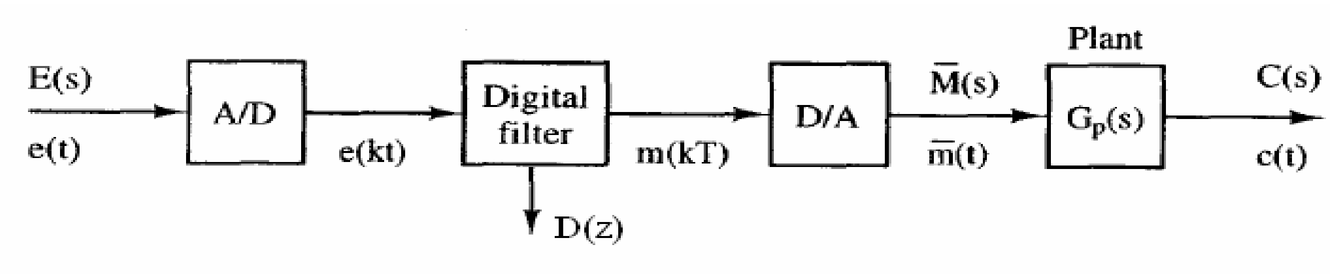
برای ساختار (C) تابع تبدیل وجود ندارد چون نمی توان $E(z)$ را جداگانه ساخت.

$$E(z) \rightarrow e(t) : t = kT$$

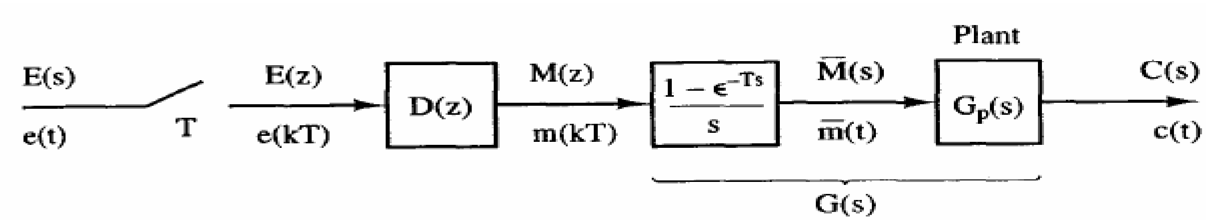
$$A(s) = G_1(s)E(s) : a(t) = \int_0^t g_1(t-\tau)e(\tau)$$

لازم است اطلاعات $e(t)$ را از زمان $t=0$ تا کنون داشته باشیم.

سیستم های حلقه باز شامل فیلتر یا کنترل کننده دیجیتال



با توجه به اینکه D/A شامل یک نگهدارنده مرتبه صفر است لذا :



$$M(z) = D(z)E(z) \rightarrow (z = e^{Ts}) \rightarrow M^*(s) = D^*(s)E^*(s)$$

$$\overline{M}(t) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}M^*(s)$$

$$\rightarrow C(s) = G_p(s)\overline{M}(s) = G_p(s)\frac{1-e^{-Ts}}{s}M^*(s)$$

$$\rightarrow C(s) = G_p(s)\frac{1-e^{-Ts}}{s}D(z)\big|_{z=e^{Ts}}\ E^*(s)$$

$$\rightarrow C(z) = Z[G_p(s)\frac{1-e^{-Ts}}{s}]D(z)E(z) \rightarrow C(z) = \left(1-z^{-1}\right)Z\left[G_p(s)\frac{1}{s}\right]D(z)E(z)$$

سیستم های حلقه باز شامل فیلتر یا کنترل کننده دیجیتال

مثال : (برای شکل صفحه قبل)

$$if: m(kT) = 2e(kT) - e[(k-1)T] \Rightarrow D(z) = 2 - z^{-1} = \frac{2z-1}{z}$$

$$G_p(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)}\right] = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$\rightarrow C(z) = D(z)G(z)E(z) = \frac{2z-1}{z} \cdot \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\Rightarrow \frac{C(z)}{z} = \frac{(2z-1)(1-e^{-T})}{z(z-e^{-T})(z-1)} = \frac{1-e^{-T}}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{e^{T}-2}{z-e^{-T}} \Rightarrow C(z) = 1-e^{-T} + \frac{z}{z-1} + \frac{z(e^{T}-2)}{z-e^{-T}}$$

$$\Rightarrow \; C(nT) = 1 + (e^{T}-2)e^{-nT} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow \; C(0) = (1-e^{T}) + 1 + (e^{T}-2) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} C(nT) = \lim_{z\to 1}(z-1)C(z) = \lim \frac{(2z-1)(1-e^{-T})}{Z(Z-e^{-T})} = 1$$

مسئله ۴-۱۱ حل شود.

سیســــــتم $\text{dc Gain} = D(z)\big|_{z=1} . G(s)\big|_{s=0} = 1$

تبدیل Z اصلاح شده

- عدم کارایی تبدیل Z برای سیستم های با تاخیر زمانی کوچکتر از زمان نمونه برداری

$e(t):$ ΔT داراي تـــــاخير

$$0 < \Delta \le 1 \qquad \rightarrow e(t-\Delta T)u(t-\Delta T)$$

- تبدیل Z تاخیر یافته

$$Z[e(t-\Delta T)u(t-\Delta T)] = Z[E(s)e^{-\Delta Ts}] = \sum_{n=1}^{\infty} e(nT-\Delta T)z^{-n}$$

delayed Z Transform :

$$E(z,\Delta) = Z[e(t-\Delta T)u(t-\Delta T)] = Z[E(s)e^{-\Delta Ts}]$$

$$E^*(s,\Delta) = E(z,\Delta)\,|_{z=e^{Ts}}$$

❋ توجه: زمان نمونه برداری تاخیری ندارد.

تبدیل Z اصلاح شده

مثال :

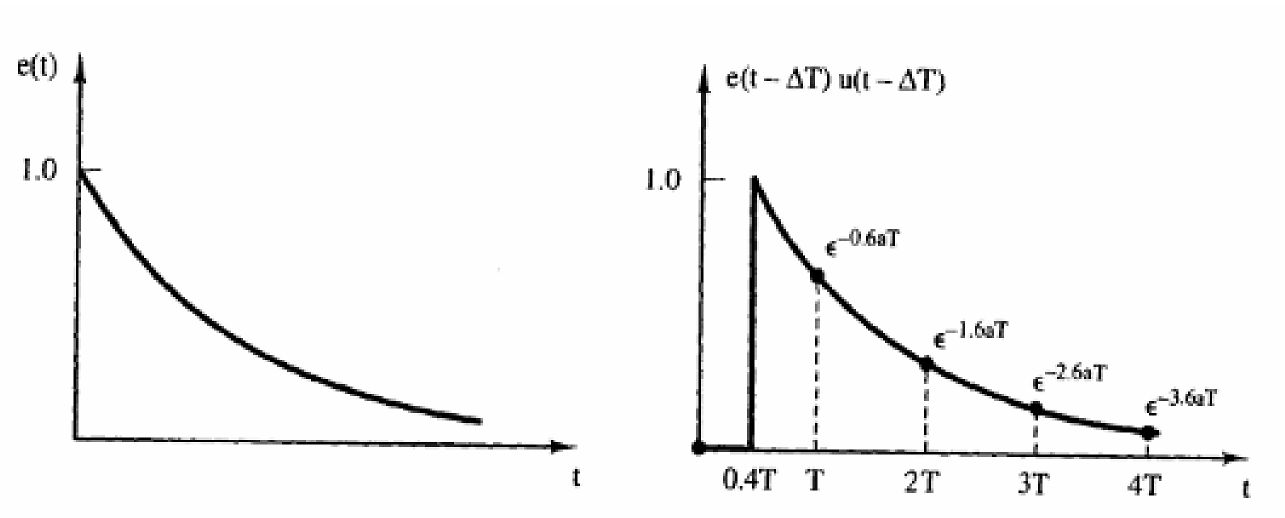
$$e(t) = e^{-at}u(t)\ ,\ \Delta = 0.4\ \rightarrow\ E(z,\Delta) = ?$$

$$E(z,\Delta) = Z[e(t-\Delta T)u(t-\Delta T)] = Z[e^{-a(t-0.4T)}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k-0.4)aT} z^{-k}$$

$$= e^{-0.6aT}z^{-1} + e^{-1.6aT}z^{-2} + e^{-2.6aT}z^{-3} + \ldots$$

$$= e^{-0.6aT}z^{-1}(1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}uz^{-2} + \ldots)$$

$$= \frac{e^{-0.6aT}z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}} = \frac{e^{-0.6aT}}{z-e^{-aT}}$$



تبدیل Z اصلاح شده (*Modified Z-Trans.*)

حال با تغییر متغیر **Δ=1-m** میتوان تبدیل Z تاخیر یافته را به تبدیل Z اصلاح شده تبدیل نمود.

$$E(z,m) = E(z,\Delta)|_{\Delta=1-m}$$

$$\rightarrow E(z,m) = Z[e(T-\Delta T)z^{-1} + e(2T-\Delta T)z^{-2} + \cdots]|_{\Delta=1-m}$$

$$= e(mT)z^{-1} + e((1+m)T)z^{-2} + \cdots$$

$$E(z,1) = E(z,m)|_{m=1} = E(z) - e(0) \ \rightarrow$$ بدون تاخیر

$$E(z,0) = E(z,m)|_{m=0} = z^{-1}E(z) \quad \rightarrow$$ یک نمونه کامل تاخیر

تبدیل Z اصلاح شده (Modified Z-Trans.)

مثال :

$$e(t) = e^{-t}$$

$$E(z,m) = e^{-mT} z^{-1} + e^{-(1+m)T} z^{-2} + \ldots$$

$$= e^{-mT} z^{-1}(1 + e^{-T} z^{-1} + \ldots) = \frac{e^{-mT}}{z - e^{-aT}}$$

روش محاسبه تبدیل Z اصلاح شده :

$$E(z,m) = z^{-1} \sum_{Poles\ of\ E(\lambda)} res\left\{E(\lambda)e^{mT\lambda}\frac{1}{1 - z^{-1}e^{\lambda T}}\right\}$$

$$E^*(s,m) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(s + jn\omega_s)e^{-(1-m)(s+jn\omega_s)T}$$

تبدیل Z اصلاح شده (*Modified Z-Trans.*)

$$Z_m[e^{-kTs}E(s)] = z^{-k}Z_m[E(s)] = z^{-k}Z_m[E(s)] = z^{-k}E(z,m)$$

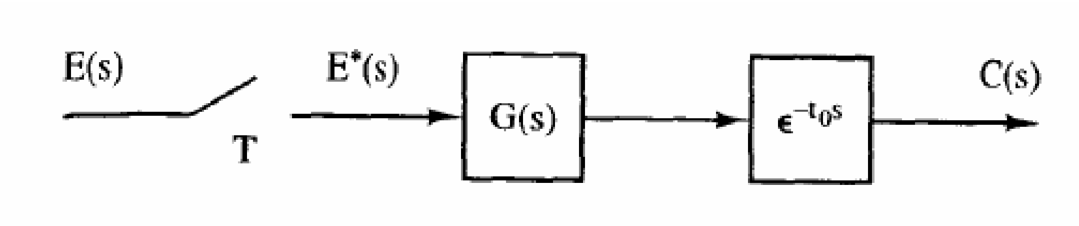
مثال :

$$e(t) = t \to E(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$E(z,m) = z^{-1}\left[\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{e^{mT\lambda}}{1-z^{-1}e^{\lambda T}}\right)\Big|_{\lambda=0}\right] = \frac{mT(z-1)+T}{(z-1)^2}$$

تبدیل Z سیستم های دارای تاخیر زمانی

مثال :



$$C(s) = G(s)e^{-t_0 s}E^*(s) \rightarrow C(z) = Z[G(s)e^{-t_0 s}]E(z)$$

$$t_0 = kT + \Delta T \quad , \quad 0 < \Delta < 1 \;\; \& \;\; k \in \mathrm{N}$$

$$\Rightarrow C(z) = Z^{-k}G(z,m)E(z) \quad , \quad \mathrm{m} = 1 - \Delta$$

$$G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)} \Rightarrow G(z,m) = Z_m\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)}\right] = (1-z^{-1})Z_m\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] \qquad (\mathrm{I})$$

$$Z_m\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] = z^{-1}\left(\lim_{\lambda\to 0} e^{m\lambda T}\frac{1}{\lambda+1}.\frac{1}{1-z^{-1}e^{\lambda T}} + \lim_{\lambda\to -1} e^{m\lambda T}\frac{1}{\lambda}.\frac{1}{1-z^{-1}e^{\lambda T}}\right) =$$

$$= z^{-1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{-e^{-mT}}{1-z^{-1}e^{-T}}\right) = \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-mT}}{z-e^{-T}} =$$

$$= \frac{z(1-e^{-mT}) + e^{-mT} - e^{-mT}}{(z-1)(z-e^{-T})} \qquad (\mathrm{II})$$

تبدیل Z سیستم های دارای تاخیر زمانی

ادامه مثال :

$$m = 1 - \Delta = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$\xrightarrow{\text{I,II}} G(z,m) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z(1-e^{-mT}) + e^{-mT} - e^{-mT}}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$C(z) = G(z,m)\frac{z}{z-1} = \frac{z(1-e^{-mT}) + e^{-mT} - e^{-mT}}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$\xrightarrow{m=0.6} C(z) = (1-e^{-0.6T})z^{-1} + (1-e^{-1.6T})z^{-2} + \dots$$

$$\Rightarrow C(nT) = 1 - e^{-(n-0.4)T} \qquad \text{n} \ge 1$$

مدل فضای حالت سیستم های گسسته در زمان

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

محاسبه مدل فضای حالت:

به منظور دست یافتن یه مدل فضای حالت میتوان مراحل زیر را طی نمود:

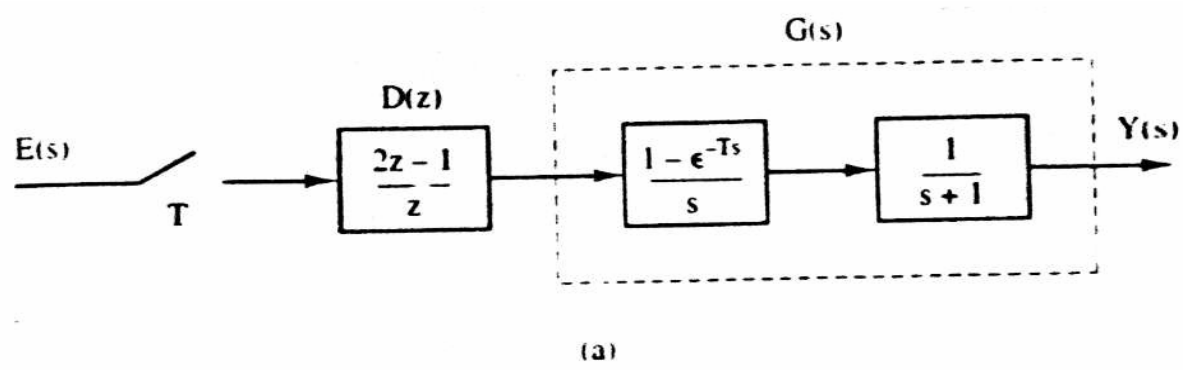
۱- دیاگرام توصیفی در حوزه Z را مشخص نمود.

۲- خروجی هر ترم تاخیری خالص را یک حالت در نظر بگیرید.

۳- معادلات حالت را با توجه به دیاگرام و متغیرهای حالت انتخابی بازنویسی نمایید.

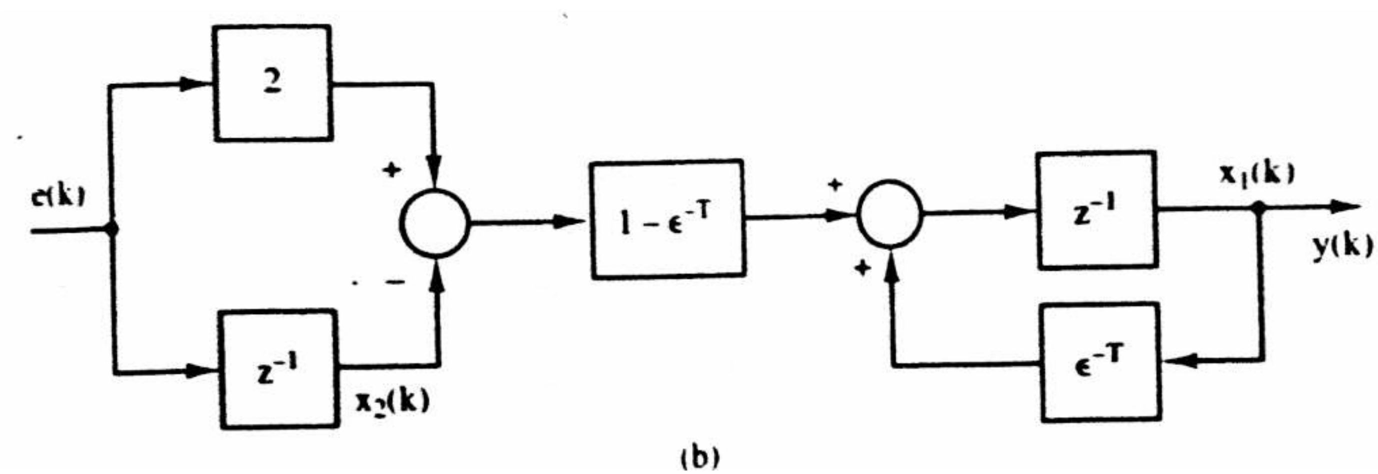
مدل فضای حالت سیستم های گسسته در زمان

مثال :



$$G(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s(s+1)}\rightarrow G(z)=\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

$$D(z)=\frac{2z-1}{z}$$



$$\left.\begin{array}{l} x_1(k+1)=e^{-T}x_1(k)+(-1+e^{-T})x_2(k)+2(1-e^{-T})e(k) \\ x_2(k+1)=e(k) \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x(k+1)=\begin{bmatrix} e^{-T} & -1+e^{-T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix} 2(1-e^{-T}) \\ 1 \end{bmatrix}u(k) \\ y(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x(k) \end{array}\right.$$

محاسبه مدل فضای حالت زمان گسسته از روی مدل فضای حالت پیوسته

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_C x(t) + B_C u(t) \\ y(t) = C_C x(t) + D_C u(t) \end{cases} \rightarrow \quad x(t) = \varphi_c(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi_c(t-\tau)B_C u(\tau)d\tau$$

$$\varphi_c(t-t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_C{}^k (t-t_0)^k}{k!}$$

به منظور محاسبه پاسخ حالت ها به صورت زمان گسسته:

$$t = kT + T$$

$$t_0 = kT$$

$$x(kT+T) = \varphi_c(T)x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} \varphi_c(KT+T-\tau)\, B_C \; \underset{\substack{\downarrow \\ Z.O.H \\ \downarrow \\ u(\tau)=u(kT) \\ kT \le \tau < (k+1)T}}{u(\tau)} \; d\tau$$

$$\Rightarrow \; x\big((k+1)T\big) = \varphi_c(T)x(kT) + \left[\int_{kT}^{kT+T} \varphi_c(KT+T-\tau)B_C d\tau\right]u(kT)$$

محاسبه مدل فضای حالت زمان گسسته از روی مدل فضای حالت پیوسته

- از مقایسه با معادله فوق با فرم استاندارد فضای حالت:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \varphi_C(T) = e^{A_C T} \\ B = \int_{kT}^{kT+T} \varphi_c(KT + T - \tau) B_C \, d\tau \end{cases}$$

$$y(t) = C_C x(t) + D_C u(t) \rightarrow y(kT) = C_C x(k) + D_C u(k)$$

$$kT - \tau = -\sigma \rightarrow d\tau = d\sigma$$

$$\Rightarrow B = \left[\int_0^T \varphi_C(t - \sigma) d\sigma \right] B_C$$

از طـــــرفي :

$$\varphi_C(T) = T + A_C T + \frac{A_C{}^2 T^2}{2!} + \frac{A_C{}^3 T^3}{3!} + \ldots = A$$

$$\int_0^T \varphi_C(t-\sigma) d\sigma = -\int_T^0 \varphi_C(\tau) d\tau = \int_0^T \varphi_C(\tau) d\tau = \int_0^T \left(T + A_C T + \frac{A_C{}^2 T^2}{2!} + \frac{A_C{}^3 T^3}{3!} + \ldots \right) d\tau$$

$$= \mathrm{I}T + \frac{A_C T^2}{} + \frac{A_C{}^2 T^3}{} + \ldots \quad \Rightarrow \quad B = \left[\mathrm{I}T + \frac{A_C T^2}{} + \frac{A_C{}^2 T^3}{} + \ldots \right] B_C$$

محاسبه مدل فضای حالت زمان گسسته از روی مدل فضای حالت پیوسته

- به منظور ساده نمودن محاسبات:

$$kT-\tau=-\sigma \rightarrow d\tau=d\sigma \;\Rightarrow\; B=\left[\int_0^T \varphi_C(t-\sigma)d\sigma\right]B_C \overset{t-\sigma=\tau}{=} -\int_T^0 \varphi_C(\tau)B_C d\tau=\int_0^T \varphi_C(\tau)B_C d\tau$$

- از طرفی

$$\varphi_C(T)=I+A_C T+\frac{A_C{}^2T^2}{2!}+\frac{A_C{}^3T^3}{3!}+\ldots=A$$

$$\Rightarrow \int_0^T \varphi_C(t-\sigma)d\sigma=-\int_T^0 \varphi_C(\tau)d\tau=\int_0^T \varphi_C(\tau)d\tau=\int_0^T\left(I+A_C T+\frac{A_C{}^2T^2}{2!}+\frac{A_C{}^3T^3}{3!}+\cdots\right)d\tau$$

$$=\mathrm{I}T+\frac{A_C T^2}{2!}+\frac{A_C{}^2T^3}{3!}+\cdots$$

$$\Rightarrow \quad B=\left[\mathrm{I}T+\frac{A_C T^2}{2!}+\frac{A_C{}^2T^3}{3!}+\ldots\right]B_C \cong A.T.B_c$$

محاسبه مدل فضای حالت زمان گسسته از روی مدل فضای حالت پیوسته

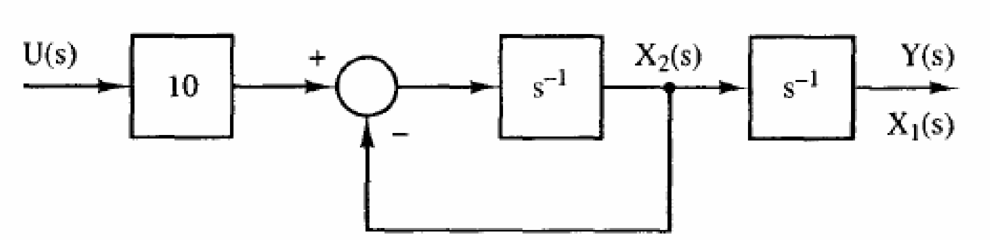
مثال :

$$G_p(s)=\frac{10}{s(s+1)} \rightarrow \dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 10\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

$$\varphi_c(t)=L^{-1}\left[\left(SI-A_c\right)^{-1}\right]=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+1\end{bmatrix}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{10}{s(s+1)}.\begin{bmatrix}s+1 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}$$

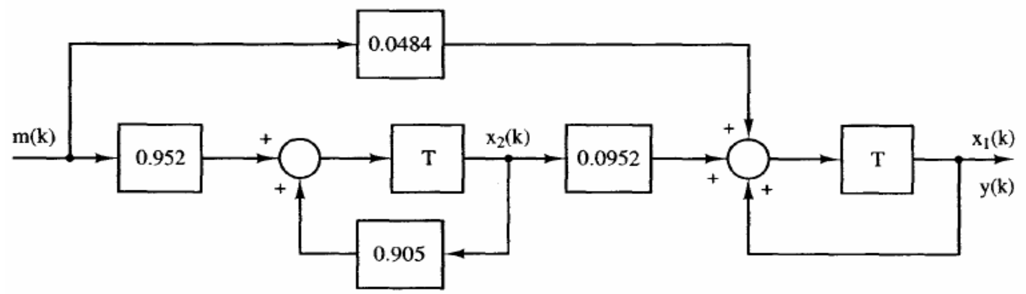
$$\Rightarrow A=\varphi_C(T)=\left.\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-T}\\ 0 & e^{-T}\end{bmatrix}\right|_{T=0.1}=\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{bmatrix}$$



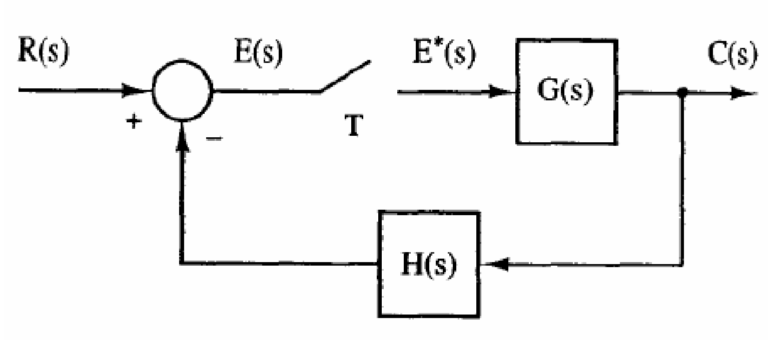
$$B=\left\{\int_0^T \varphi_C(\tau)d\tau\right\}B_C=\left.\begin{bmatrix}\tau & \tau+e^{-\tau}\\ 0 & -e^{-\tau}\end{bmatrix}\right|_0^T=\begin{bmatrix}0.1 & 0.00484\\ 0 & 0.0952\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0484\\ 0.952\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.0484\\ 0.952\end{bmatrix}m(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$



سیستم های زمان گسسته حلقه بسته



$$\begin{cases} C(s) = G(s)E^*(s) \\ E(s) = R(s) - H(s)C(s) \end{cases}$$

$$\rightarrow E(s) = R(s) - H(s)G(s)E^*(s)$$

$$\rightarrow E^*(s) = R^*(s) - \overline{GH}^*(s)E^*(s)$$

$$\rightarrow E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)}$$

$$\rightarrow C(s) = G(s).\frac{R^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)} = \frac{G(s)R^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)} \rightarrow \quad C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + \overline{GH}(z)}$$

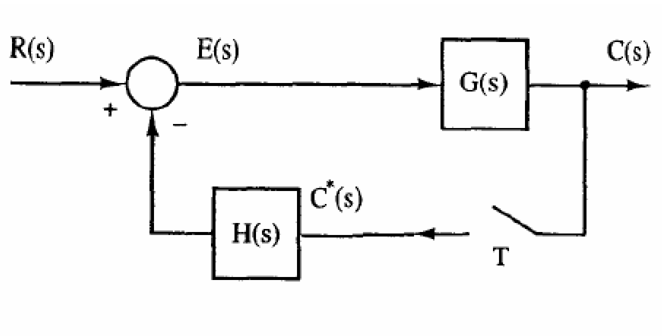
$$C(s) = G(s)R^*(s) - G(s)\overline{HC}^*(s)$$

$$\rightarrow C^*(s) = G^*(s)R^*(s) - G^*(s)\overline{HC}^*(s) \rightarrow \quad ???$$

سیستم های زمان گسسته حلقه بسته

در صورت پیچیده شدن مسئله لازم است روشی جهت ساده سازی و نتیجه دار بودن حل پیشنهاد گردد.

مثال :



$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)C^*(s)$$

$$\rightarrow C(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C^*(s)$$

$$\rightarrow C^*(s) = \overline{GR}^*(s) - \overline{GH}^*(s)C^*(s)$$

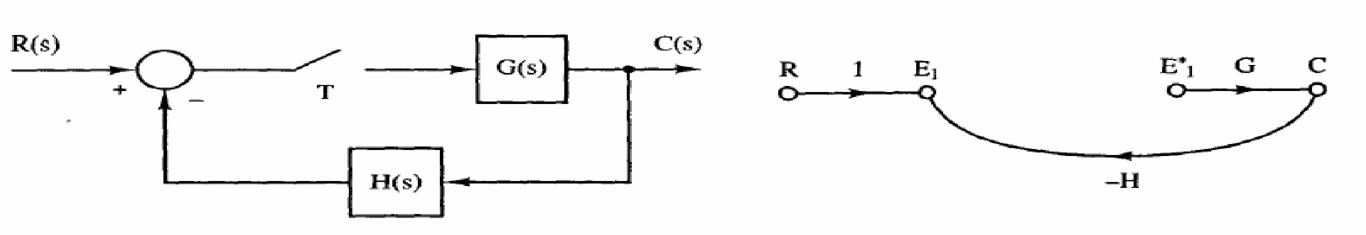
$$\rightarrow C^*(s) = \frac{\overline{GR}^*(s)}{1 + \overline{GH}^*(s)}$$

تذکر: در این مثال نمی توان تابع تبدیل را محاسبه نمود. زیرا ورودی ها از طریق نمونه بردار وارد نشده اند.

به صورت یک اصل، ورودیهایی که به صورت آگاهانه به سیستم داده می شوند می بایست از طریق نمونه بردار وارد گردند تا بتوان تابع تبدیل را محاسبه نمود، ولیکن برای ورودیهایی مثل اغتشاش که در اختیار ما نیست (امکان نمونه برداری وجود ندارد) و یا به عبارت دیگر مستقیماً به سیستم آنالوگ اعمال نمی شود تابع تبدیل حوزه Z قابل استخراج نیست.

محاسبه تابع تبدیل حلقه بسته برای سیستم گسسته در زمان

۱- تشکیل بلوک دیاگرام و/یا نمودار گذر سیگنال.



۲- متغیری را به هر نمونه بردار نسبت میدهیم و متغیر را ستاره دار می کنیم برای خروجی نمونه بردار (E_1^*, E_1).

۳- خروجی نمونه بردار را بصورت یک ورودی در نظر بگیرید.

۴- خروجی سیستم و ورودی نمونه بردار را به عنوان خروجی در نظر گرفته و بصورت تابعی از خروجی نمونه بردار بنویسید:

$$\begin{cases} E_1 = R - HC = R - GHE^*_1 \\ C = GE^*_1 \end{cases}$$

۵- از معادلات به دست آمده تبدیل ستاره بگیرید و توابع تبدیل متناظر را بدست آورید.

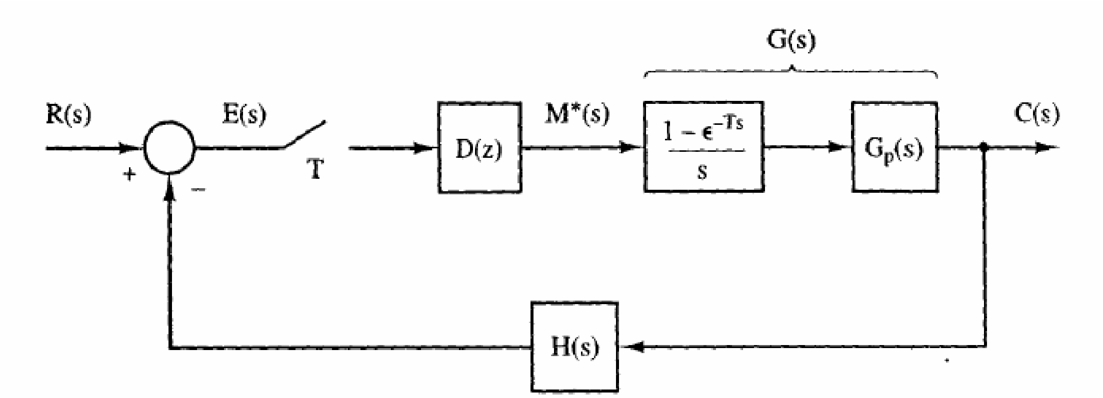
$$E^*_1 = R^* - \overline{GH}^* E^*_1 \quad \rightarrow \quad E^*_1 = \frac{R^*}{1+\overline{GH}^*}$$

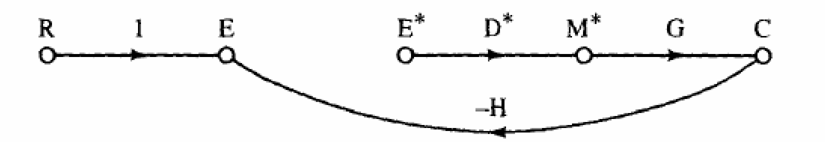
$$C^* = G^* E^*_1 \quad \rightarrow \quad C^* = \frac{G^* R^*}{1+\overline{GH}^*}$$

محاسبه تابع تبدیل حلقه بسته برای سیستم گسسته در زمان

اگر بیش از یک نمونه بردار داشته باشیم لازم است چند معادله چند مجهولی حل گردد. در این حالت می توان از سیگنال فلو گراف نمونه برداری شده استفاده نمود.

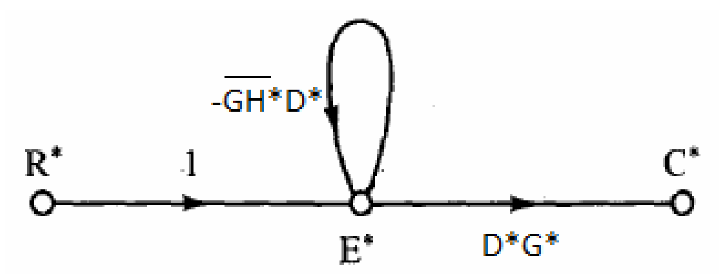
مثال :





$$E = R - GHD^*E^* \qquad \rightarrow \qquad E^* = R^* - \overline{GH}^*D^*E^*$$

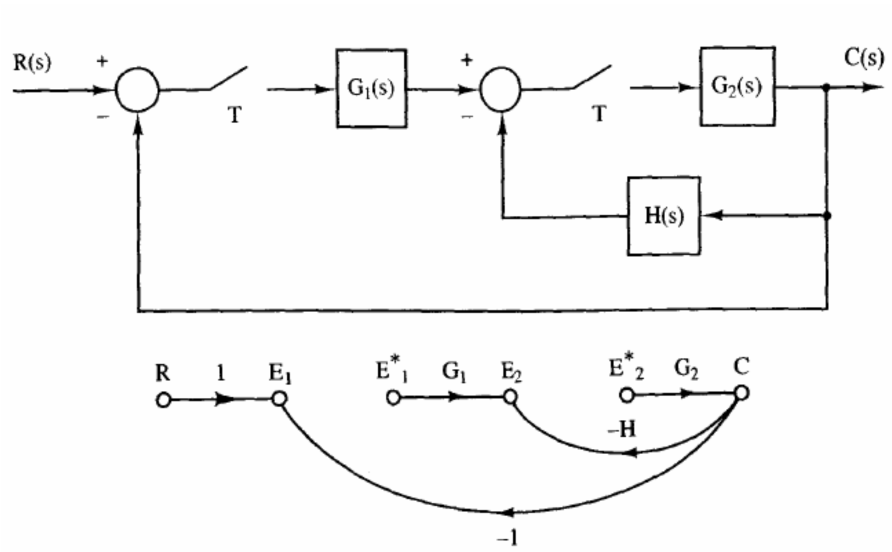
$$C = E^*D^*G \qquad \rightarrow \qquad C^* = E^*D^*G^*$$



$$\xrightarrow{mason} C(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)\overline{GH}(z)} R(z)$$

محاسبه تابع تبدیل حلقه بسته برای سیستم گسسته در زمان

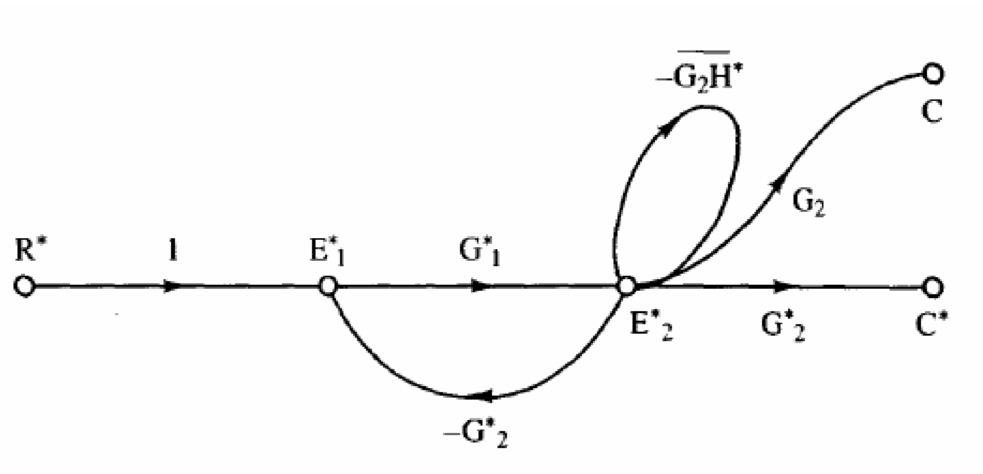
مثال :



$$E_1 = R - G_2E_2^* \quad \rightarrow \quad E_1^* = R^* - G_2^*E_2^*$$

$$E_2 = G_1E_1^* - G_2HE_2^* \quad \rightarrow \quad E_2^* = G^*_1E_1^* - \overline{G_2H}^*E_2^*$$

$$C(s) = G_2E_2^* \quad \rightarrow \quad C^* = G^*_2E_2^*$$



$$\xrightarrow{mason} E_2^* = \frac{G^*_1}{1 + G^*_1G^*_2 + \overline{G_2H}^*}R^*$$

$$\xrightarrow{mason} C^* = \frac{G^*_1G^*_2}{1 + G^*_1G^*_2 + \overline{G_2H}^*}R^*$$

باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

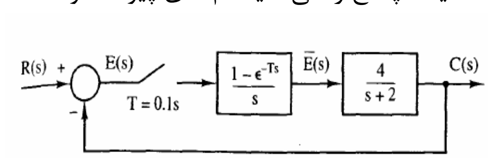
سیستم های کنترل دیجیتال

Lecture 5

تحلیل پاسخ زمانی سیستم های گسسته در زمان

پاسخ زمانی سیستم های دیجیتال

مقایسه پاسخ زمانی سیستم های پیوسته و گسسته در یک مثال



$$C(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}R(z)$$

$$G(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}.\frac{4}{s+2}\right]=\frac{z-1}{z}.Z\left[\frac{4}{s(s+2)}\right]$$

$$=\frac{z-1}{z}.\frac{2(1-e^{-2T})z}{(z-1)(z-e^{-2T})}\bigg|_{T=0.1}=\frac{0.3625}{z-0.8187}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{r}(t)=u(t)\Rightarrow R(z)=\frac{z-1}{z}\\&T(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.3625}{z-0.4562}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ C(z)=\frac{0.3625z}{(z-1)(z-0.4562)}=\frac{0.667z}{(z-1)}+\frac{-0.667z}{z-0.4562}$$

$$\Rightarrow c(kT)=Z^{-1}\left[C(z)\right]=0.667\left[1-(0.4562)^{k}\right]$$

پاسخ زمانی سیستم های دیجیتال

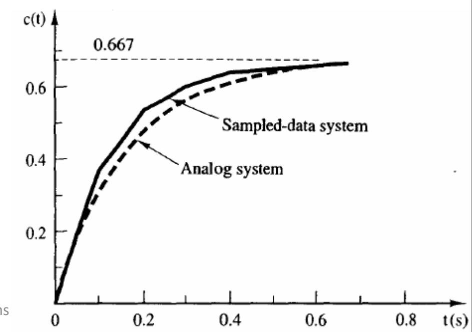
در حالت پیوسته

$$T_a(s) = \frac{G_p(s)}{1+G_p(s)} = \frac{4}{s+6}$$

$$\Rightarrow C_a(s) = \frac{1}{s}.\frac{4}{s+6} = \frac{0.667}{s} + \frac{0.667}{s+6}$$

$$\Rightarrow c_a(t) = 0.667(1-e^{-6t})$$

kT	$c(kT)$	$c_a(t)$
0	0	0
0.1	0.363	0.300
0.2	0.528	0.466
0.3	0.603	0.557
0.4	0.639	0.606
0.5	0.654	0.634
0.6	0.661	0.648
⋮		
1.0	0.666	0.665



پاسخ زمانی سیستم های دیجیتال

$$\frac{1}{1+G(z)} = \frac{1}{1+\dfrac{0.3625}{z-0.8187}} = \frac{z-0.8187}{z-0.4562} = 1-0.363z^{-1}-0.165z^{-2}+\ldots$$

$$C_1(s) = \frac{4}{s(s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} \rightarrow C_1(t) = 2(1-e^{-2t})$$

$$\rightarrow C(s) = C_1(s)\left[1-0.363e^{-Ts}-0.165e^{-2Ts}+\ldots\right]$$

$$\rightarrow C(t) = 2(1-e^{-2t}).\left[1-0.363e^{-Ts}-0.165e^{-2Ts}+\ldots\right]$$

$$= 2(1-e^{-2t}) - 2\times 0.363\left(1-e^{-2(t-T)}\right)u(t-T) - 2\times 0.165\left(1-e^{-2(t-2T)}\right)u(t-2T)+\ldots$$

$$\overset{T=0.1}{\Rightarrow} C(3T) = C(0.3) = 2(1-e^{-0.6}) - 2\times 0.363\left(1-e^{-2(0.3-0.1)}\right) - 2\times 0.165\left(1-e^{-2(0.3-0.2)}\right) = 0.603$$

نتیجه مشابه حالت اول

- به صورت جمع آثار پاسخ پله سیستم حلقه باز تأخیر یافته

مقدار نهايي : $\lim_{n\to\infty} C(nT) = 0.667$

$$\lim_{n\to\infty} C(nT) = (z-1).C(z)\big|_{z=1} = (z-1).\frac{G(z)}{1+G(z)}.R(z)\bigg|_{z=1} = \frac{G(z)}{1+G(z)}\bigg|_{z=1} \frac{2}{1+2} = 0.667$$

$$C(s) = G_p(s)E(s)$$

$$dc\ Gain = \lim_{s\to 0} G_p(s) = G_p(0)$$

پاسخ زمانی سیستم های دیجیتال

اگر به حالت ماندگار در خروجی رسیده باشیم در این حالت ورودی نمونه برداری مقدار ثابتی را داشته و خروجی نگهدارنده مرتبه صفر (Zero Order Hold) نیز ثابت و برابر مقدار ورودی نمونه بردار خواهد بود، بنابراین نمونه بردار و نگهدارنده بر مقدار حالت ماندگار سیگنال بی تأثیر بوده و قابل صرف نظر میباشند.

از این رو برای یک سیستم پایدار و دیجیتال بهره dc سیستم می تواند با حذف نمونه بردار و نگهدارنده و با ارزیابی نتایج برای سیستم های آنالوگ در S=0 بدست آید. (به شرط ورودی ثابت و استفاده از Z.O.H)

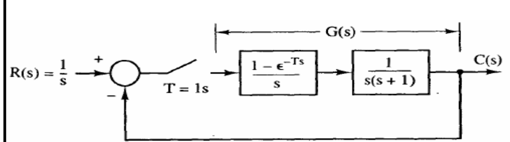
تذکر: در صورتیکه سیستم پایدار باشد ، در حالت ماندگار وجود یا عدم وجود نگهدارنده بی تأثیر است و در محاسبات میتوان از آن صرف نظر نمود.

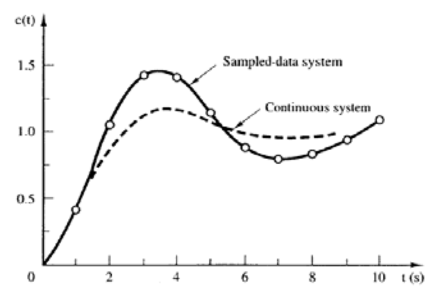
* لازم به ذکر است این شرایط برای سیستم های ناپایدار صدق نمی کند.

$$G_p(s) = \left.\frac{4}{s+2}\right|_{s=0} = 2 \quad \Rightarrow \quad G_{cl} = \frac{2}{2+1} = 0.667$$

پاسخ زمانی سیستم های دیجیتال

مثال:





$$C(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} R(z)$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] = \frac{0.368z+0.264}{z^2-1.1368z+0.368}$$

$$\frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}$$

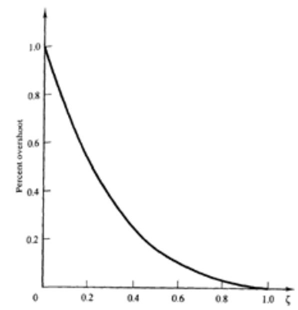
$$R(z) = \frac{z-1}{z}$$

$$\Rightarrow C(z) = \frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632} \cdot \frac{z-1}{z} = 0.368z^{-1} + 1.00z^{-2} + 1.40z^{-3} + 1.40z^{-4} + 1.15z^{-5} + \dots$$

$$\Rightarrow \underset{n\to\infty}{C(nT)} = \lim_{z\to 1}(z-1)C(z) = \frac{0.632}{0.632} = 1$$

پاسخ زمانی سیستم های دیجیتال

برای سیستم پیوسته



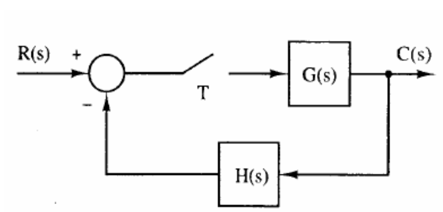
$$\frac{C(s)}{R(u)}=\frac{1}{s^2+s+1}$$

$$\omega n=1\rightarrow \zeta=0.5\rightarrow \%MP=e^{\frac{-3\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100=\%18$$

در حالت کلی مطلوبست که اثر نمونه برداری قابل صرفنظر باشد یا به عبارت دیگر پاسخ سیستم پیوسته و گسسته یکی باشد.

در حالیکه در این سیستم فرکانس نمونه برداری پایین بوده و موجب افـزایش فـراجهش در فرم گسسته در زمان می شود.(در صورت امکان لازم است فرکانس نمونـه بـرداری افـزایش یابد البته اگر امکانات سخت افزاری مهیا باشد).

تناظر صفحه S و Z

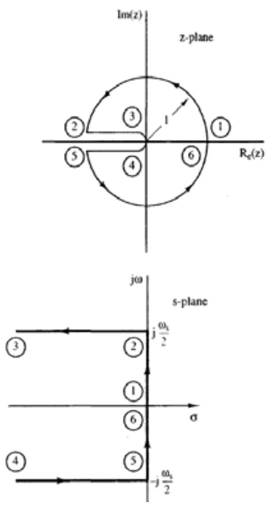


$$C(z)=\frac{G(z)R(z)}{1+\overline{GH}(z)}=\frac{k\prod_{i}^{m}(z-z_i)}{\prod_{j}^{n}(z-P_j)}R(z)$$

Charactersitic Polynomial: $1+\overline{GH}(z)=0$

$$C(z)=\underset{\substack{\downarrow\\ k_1(P_1)^k}}{\frac{k_1 z}{z-P_1}}+\ldots+\underset{\substack{\downarrow\\ k_n(P_n)^k}}{\frac{k_n z}{z-P_n}}+C_R(z)$$

تناظر صفحه S و Z و تحلیل پایداری



$$E(s)=\frac{1}{s+a}\rightarrow E^*(s)=\frac{e^{Ts}}{e^{Ts}-e^{-aT}}$$

$$\downarrow$$

$$s=-a\leftrightarrow z=e^{-aT}$$

$$if\;\; s=s_1\leftrightarrow z=e^{s_1T}$$

$$z=e^{sT}=e^{\sigma T+j\omega T}=e^{\sigma T}\left[\cos\left(\omega T\right)+j\sin\left(\omega T\right)\right]=e^{\sigma T}\measuredangle\omega T$$

$$(1)\quad \omega=0\rightarrow z=1\measuredangle 0$$

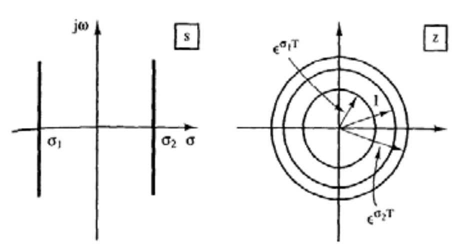
$$(2)\quad \omega=\frac{\omega_s}{2}\rightarrow z=1\measuredangle\frac{2\pi}{2T}\times T=1\measuredangle\pi$$

$$(3)\text{-}\ (2)\rightarrow\quad s=\sigma+j\frac{\omega_s}{2}=e^{\sigma T}e^{j\pi}=e^{\sigma T}\measuredangle\pi$$

❈ سایر باندها در سمت چپ نیز به داخل دایره واحد منتقل میگردند.

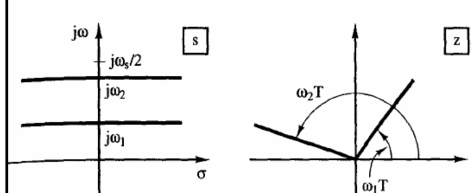
❈ سمت راست محور $j\omega$ در صفحه S نیز متناظر خارج دایره واحد در صفحه Z است.

تناظر صفحه S و Z و استفاده از آن در تحلیل پاسخ زمانی



$$s=\sigma_1+j\omega=e^{\sigma T}e^{j\pi}=e^{\sigma T}\measuredangle\pi\qquad :\sigma_1\rightarrow cte.$$

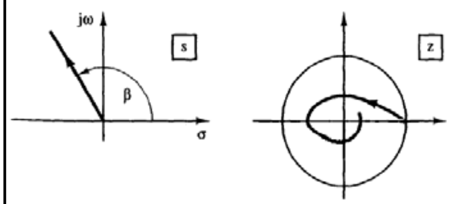
$$Z=e^{s_1T}=e^{\sigma_1T}e^{j\omega T}=e^{\sigma_1T}\measuredangle\omega T$$



$$s=\sigma+j\omega_1\qquad :\omega_1T\rightarrow cte.$$

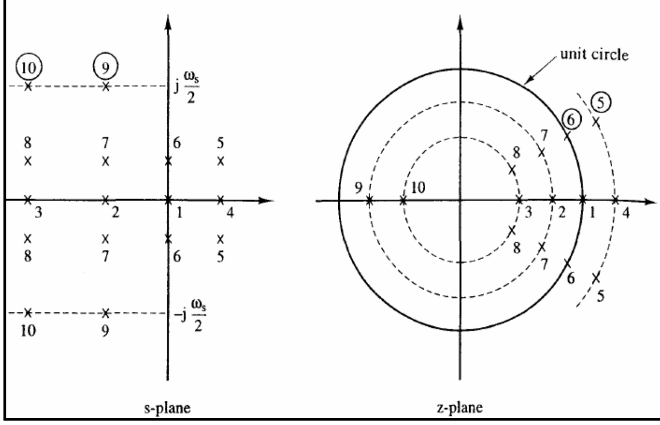
$$Z=e^{\sigma T}e^{j\omega_1T}=e^{\sigma T}\measuredangle\omega_1T$$

تناظر صفحه S و Z و استفاده از آن در تحلیل پاسخ زمانی



$$\tan(\beta)=\frac{|j\omega|}{|\sigma|}=\frac{\omega}{\sigma}$$

$$z=e^{sT}=e^{\sigma T}\measuredangle \sigma T\tan(\beta)$$

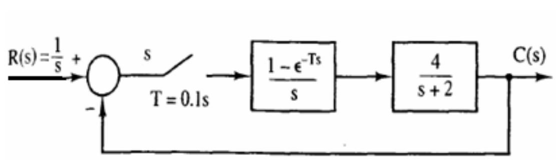


$$Z=e^{sT}\Big|_{s=\sigma\pm j\omega T}=e^{\sigma}e^{\pm j\omega T}$$

$$=e^{\sigma T}\measuredangle \pm\omega T=\mathrm{r}\measuredangle\pm\theta$$

تناظر صفحه S و Z و استفاده از آن در تحلیل پاسخ زمانی

مثال :



$$G(z)=\frac{0.3625}{z-0.8187}$$

$$\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.3625}{z-0.4562}\rightarrow Z=0.4562=e^{sT}=e^{0.1s}$$

$$\Rightarrow\ s=10\ln(0.4562)=-7.848\quad\Rightarrow \text{Time Constant: }\tau=0.127\rightarrow t_s=4\tau=0.508^{(s)}$$

تناظر صفحه S و Z و استفاده از آن در تحلیل پاسخ زمانی

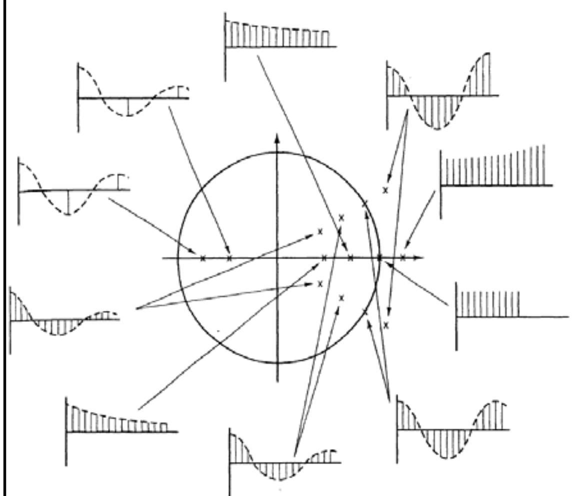


Figure 6-11 Transient response characteristics of the z-plane pole locations.

- شکل روبرو به ما کمک می نماید تا درک مناسبی نسبت به پاسخ هایی که هر کدام از قطب ها ایجاد میکنند پیدا کنیم.

تناظر صفحه S و Z و روابط تحلیلی

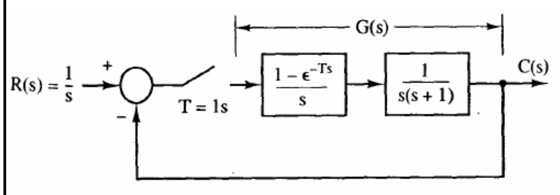
$$G(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^{\ 2}} \rightarrow s1,2=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$z=e^{sT}=e^{-\zeta\omega_n T}\measuredangle \pm \omega_n T\sqrt{1-\zeta^2}=r\measuredangle \pm \theta$$

$$\begin{cases} r=e^{-\zeta\omega_n T} \\ \theta=\omega_n T\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases} \rightarrow \zeta\omega_n=-\ln r \Rightarrow \frac{-\ln r}{\theta}=\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \begin{cases} \zeta=\frac{-\ln r}{\sqrt{\ln^2 r+\theta^2}} \quad :(r<1) \\ \omega_n=\frac{1}{T}\sqrt{\ln^2 r+\theta^2} \\ \tau=\frac{1}{\zeta\omega_n}=\frac{T}{-\ln r} \rightarrow r=e^{-\frac{T}{\tau}} \end{cases}$$

تناظر صفحه S و Z

مثال :



$$C(z)=\frac{0.368z+0.264}{z^2-1.1368z+0.368}$$

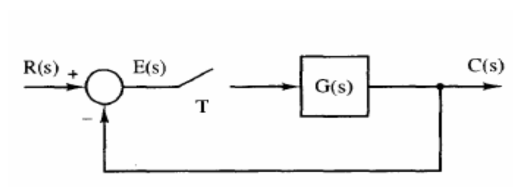
$$\frac{G(z)}{1+G(z)}=\frac{0.368z+0.264}{z^2-z+0.632}\rightarrow z_{1,2}=0.5\pm j0.618=0.7949\measuredangle 51^\circ=0.7949\measuredangle 0.89(rad)$$

$$\begin{cases} r=0.7949 \\ \theta=0.89(rad) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T=1^{(s)} \\ \zeta=\dfrac{-\ln r}{\sqrt{\ln^2 r+\theta^2}}=0.2496 \\ \omega_n=\dfrac{1}{T}\sqrt{\ln^2 r+\theta^2}=0.9197 \\ \tau=\dfrac{-T}{\ln r}=4.3566 \end{cases}$$

$T=0.1^{(s)}$:

Discrete	Continuous
$\zeta=0.475$	$\zeta=0.5$
$\omega_n=0.998$	$\omega_n=1$
$\tau=2.11(s)$	$\tau=2(s)$

حالت ماندگار و خطای حالت ماندگار



$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)}$$

$$\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G(z)}$$

$$G(z)=\frac{k\prod_i^m(z-z_i)}{(z-1)^N\prod_j^n(z-z_j)}R(z)\qquad N: System\ Type$$

$$\text{Step Input}: e_{ss}(kT)=\lim_{z\to1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to1}\frac{(z-1)R(z)}{1+G(z)}\bigg|_{R(z)=\frac{z-1}{z}}=\frac{1}{1+\lim_{z\to1}G(z)}=\frac{1}{1+\underbrace{k_p}_{\text{Position Error Constant}}}$$

$$if\ N=0\rightarrow e_{ss}(kT)=\frac{1}{1+k_p}=\frac{1}{1+k_{dc}}$$

$$if\ N\geq1\rightarrow k_p=\infty\rightarrow e_{ss}(kT)=0$$

حالت ماندگار و خطای حالت ماندگار

$$\text{Ramp Input}: R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e_{ss}(kT)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)R(z)}{1+G(z)}\bigg|_{R(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}}=\lim_{z\to 1}\frac{Tz}{(z-1)+(z-1)G(z)}=\frac{T}{\lim\limits_{z\to 1}(z-1)G(z)}=\frac{1}{k_v}$$

$$\Rightarrow \text{Velocity Error Constant}\quad k_v=\lim_{z\to 1}\frac{1}{T}(z-1)G(z)$$

$$if\ \ N=0\to k_v=0\to e_{ss}=\infty$$

$$if\ \ N=1\to k_v=\frac{k_{dc}}{T}\to e_{ss}(kT)=\frac{1}{k_v}=\frac{T}{k_{dc}}$$

$$if\ \ N\geq 2\to k_v=\infty\to e_{ss}(kT)=0$$

باسمه تعالی

سیستم های کنترل دیجیتال

Lecture 6

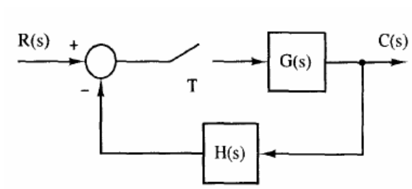
تحلیل پایداری

مقدمه

$$C(z)=\frac{G(z)}{1+\overline{GH}(z)}R(z)=\frac{k\prod^{m}(z-z_j)}{\prod^{n}(z-P_j)}R(z)$$

$$\rightarrow C(z)=\frac{k_1 z}{z-P_i}+\ldots+\frac{k_n z}{z-P_n}+C_R(z)$$

$$Z^{-1}\left[\frac{k_i z}{z-P_i}\right]=k_i\,(P_i)^k \rightarrow$$

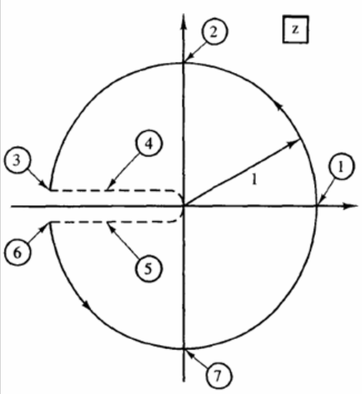


به منظور همگرایی و رفتن پاسخ حالت گذرا به سمت صفر لازم است اندازه قطب کوچکتر از ۱ باشد.

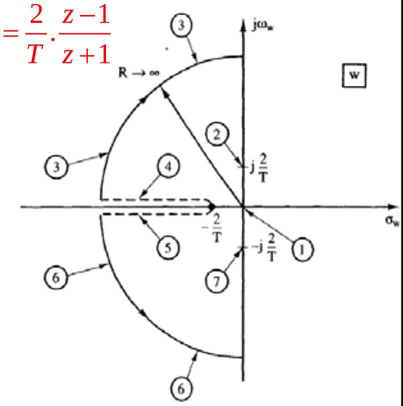
لذا سیستم پایدار است اگر ریشه های معادله مشخصه $1+\overline{GH}(z)=0$ داخل دایره واحد باشد .

- ❑ تمامی قطب ها داخل دایره واحد باشند: سیستم پایدار است.
- ❑ حداقـــل یک قطب روی دایـــــره واحـــــد: سیستم در مرز ناپایداری است.
- ❑ حداقـــل یک قطب خـــارج از دایـــره واحد: سیستم ناپایدار است.

تبدیل دو خطی و ارتباط صفحه Z و W



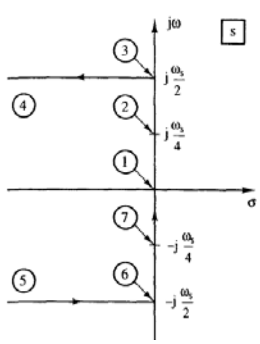
$$z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\leftrightarrow w=\frac{2}{T}.\frac{z-1}{z+1}$$

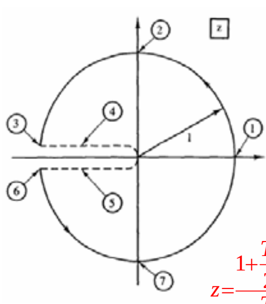


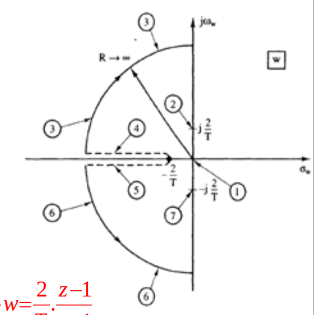
$$1-\quad w=\frac{2}{T}.\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=1}=0 \qquad 3-\quad w=\frac{2}{T}.\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=-1}\to\infty$$

$$2-\quad w=\frac{2}{T}.\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=j}=j\frac{2}{T} \qquad 4,5-\quad w=\frac{2}{T}.\frac{z-1}{z+1}\Big|_{\substack{z=re^{j\pi}\\ r<1}}=-\frac{2}{T}.\frac{1+r}{1-r}$$

تبدیل دو خطی و ارتباط صفحه Z و W







$$z=e^{Ts} \longrightarrow \qquad z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}\leftrightarrow w=\frac{2}{T}.\frac{z-1}{z+1} \longrightarrow$$

$$w=\frac{2}{T}.\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=e^{j\omega T}}=\frac{2}{T}.\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1}=\frac{2}{T}.\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}+e^{-j\omega T/2}}=j\frac{2}{T}\tan\omega T/2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_w=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}}$$

تبدیل دو خطی و ارتباط صفحه Z و W

$$\omega_w = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}$$

در فرکانس های پایین:

$$\omega_w = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \approx \frac{2}{T}\frac{\omega T}{2} = \omega$$

بازه فرکانس های کوچک را می توان به صورت زیر دانست:

$$\frac{\omega T}{2} \le \frac{\pi}{10} \;\rightarrow\; \omega \le \frac{1}{10}\frac{2\pi}{T} = \frac{\omega_s}{10}$$

خطای تقریب فوق در این بازه کمتر از ۴٪ است.

تحلیل پایداری با استفاده از روش روث-هرویتز

این روش را نمیتوان به طور مستقیم به سیستم های گسسته اعمال نمود. لازم است ابتدا از تبدیل دوخطی استفاده نموده و سپس برای تحلیل سیستم جدید از روش روث-هرویتز استفاده کرد.

$$G(z)\Big|_{z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}} = G(w)$$

w^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	$\cdots$
w^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	$\cdots$
w^{n-2}	c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$	d_1	d_2	d_3	$\cdots$
w^1	j_1			
w^0	k_1			

$$c_1 = \frac{b_{n-1}b_{n-2} - b_n b_{n-3}}{b_{n-1}}$$

$$c_2 = \frac{b_{n-1}b_{n-4} - b_n b_{n-5}}{b_{n-1}}$$

$$c_3 = \frac{b_{n-1}b_{n-6} - b_n b_{n-7}}{b_{n-1}}$$

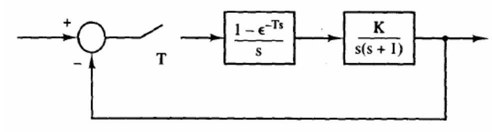
$$d_1 = \frac{c_1 b_{n-3} - b_{n-1}c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_{n-5} - b_{n-1}c_3}{c_1}$$

$$\vdots$$

تحلیل پایداری با استفاده از روش روث-هرویتز

مثال



$$T = 0.1s$$

$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\times\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{0.00484z+0.00468}{(z-1)(z-0.905)}$$

$$G(z)\Big|_{z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w}} = \frac{0.000016w^2-0.1872w+3.81}{3.81w^2+3.80w}$$

$$1+kG(w) = (3.81-0.000016k)w^2+(3.8-0.1872k)w+3.81k = 0$$

$$\left.\begin{array}{r|ll l} w^2 & 3.81-0.000016k & 3.81k & \rightarrow k<28.13 \\ \rightarrow w^1 & 3.8\text{-}0.1872k & & \rightarrow k<20.30 \\ w^0 & 3.81k & & \rightarrow k>0.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 0<k<20.3$$

مثال

$$T = 1\,s$$

$$G(z) = Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\times\frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{0.368z+0.264}{z^2-1.368z+0.368}$$

$$1+kG(w) = (1-0.0381k)w^2+(0.924-0.386k)w+0.924k = 0$$

$$\left.\begin{array}{r|ll l} w^2 & 1-0.0381k & 0.924k & \rightarrow k<26.2 \\ \rightarrow w^1 & 0.924-0.386k & & \rightarrow k<2.39 \\ w^0 & 0.924k & & \rightarrow k>0.00 \end{array}\right\} \Rightarrow 0<k<2.39$$

$$if\ \ k = 2.39 \rightarrow \text{ Marginally Stability}$$

$$\Rightarrow (1-0.0381k)w^2+(0.924-0.386k)w+0.924k\Big|_{k=2.39} = 0$$

$$\Rightarrow w = \pm j1.544 = \pm j\omega_w \rightarrow \omega_w = 1.549$$

$$\omega_w = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2} \rightarrow \omega = \frac{2}{T}\tan^{-1}\frac{\omega_w T}{2}\Bigg|_{\substack{T=1\\ \omega_w=1.549}} = \frac{2}{1}\tan^{-1}\frac{1.549\times 1}{2} = 1.32\,{}^{rad}\!/_{s}$$

پایداری سیستم به زمان نمونه برداری وابسته است.

$$\begin{cases} T = 0.1s \rightarrow 0<k<20.3 \\ T = 1.0s \rightarrow 0<k<2.39 \end{cases} \Rightarrow$$

این امر را میتوان به اینصورت توجیه نمود که نمونه بردار و نگهدارنده مرتبه صفر همانند تاخیر زمانی عمل میکنند و هرچه زمان نمونه برداری افزایش یابد شیب کاهش فاز کندتر می شود و امکان ناپایداری را افزایش می دهد.

تحلیل پایداری با استفاده از روش جوری

آرایه جوری :

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \qquad a_n > 0$$

z^0	z^1	z^2	$\cdots$	z^{n-k}	$\cdots$	z^{n-1}	z^n
a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-k}	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_k	$\cdots$	a_1	a_0
b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-k}	$\cdots$	b_{n-1}	
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_{k-1}	$\cdots$	b_0	
c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-k}	$\cdots$		
c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\cdots$	c_{k-2}	$\cdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
l_0	l_1	l_2	l_3				
l_3	l_2	l_1	l_0				
m_0	m_1	m_2					

$$b_k = \begin{bmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{bmatrix}$$

$$c_k = \begin{bmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{bmatrix}$$

$$d_k = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{bmatrix}$$

تحلیل پایداری با استفاده از روش جوری

شرط لازم و کافی برای اینکه ریشه های Q(z) داخل دایره واحد باشند با شرط $a_n>0$ عبارت است از :

1) $Q(1)>0$
2) $(-1)^n Q(-1)>0$
3) $|a_0|<|a_n|$

ابتدا سه شرط اول لازم است بررسی شوند.

4) $|b_0|>|b_{n-1}|$

$|c_0|>|c_{n-2}|$

$|d_0|>|d_{n-3}|$

.

.

.

$|m_0|>|m_2|$

تذکر : برای سیستم های درجه دوم بررسی سه شرط اول لازم و کافی است .

تحلیل پایداری با استفاده از روش جوری

مثال :

$$Q(z)=z^3-1.8z^2+1.05z-0.2=0$$

1) $Q(1)>0 \quad \rightarrow 1-1.8+1.05-0.2=0.05>0 \quad \surd$

2) $(-1)^3 Q(-1)>0 \quad \rightarrow -1(-1-1.8-1.05-0.2)=4.05>0 \quad \surd$

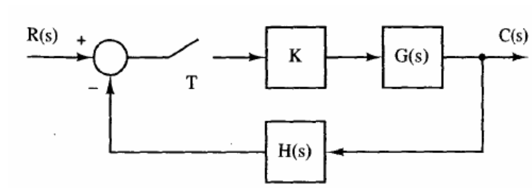
3) $|a_0|<|a_3| \quad \rightarrow |-0.2|<|1| \quad \surd$

z^0	z^1	z^2	z^3
-0.2	1.05	-1.8	1
1	-1.8	1.05	-0.2
-0.96	1.59	-0.69	
-0.69	1.59	-0.96	

4) $|-0.96|>|0.69| \quad \surd \quad \rightarrow$ ریشه های $Q(z)$ پایدارند .

$$Q(z)=(z-0.5)^2(z-0.8)$$

تحلیل پایداری با استفاده از مکان هندسی ریشه ها



$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{kG(z)}{1+k\overline{GH}(z)} \rightarrow \Delta(z)=1+k\overline{GH}(z)=0$$

روش رسم مکان هندسی ریشه ها کاملا مشابه رسم مکان هندسی ریشه ها در سیستم های پیوسته است ولیکن لازم است به منظور تحلیل پایداری، وضعیت نسبی مکان هندسی ریشه ها نسبت به دایره واحد بررسی گردد.

تحلیل پایداری با استفاده از مکان هندسی ریشه ها

مثال:

$$kG(z)=\frac{0.368k(z+0.717)}{(z-1)(z-0.368)},\quad T=1(\sec)$$

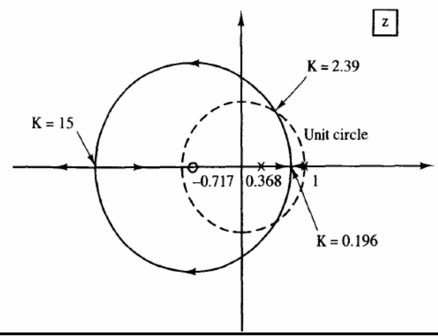
$$\frac{dG(z)}{dz}=0\rightarrow\frac{0-368(z-1)(z-0.368)-0.368(z+0.717)(z-0.368+z-1)}{\left((z-1)(z-0.368)\right)^2}=0$$

$$\rightarrow(z-1)(z-0.368)-(z+0.717)(z-0.368+z-1)=0$$

$$\rightarrow z^2+1.436z+1.3489=0\rightarrow\begin{cases}z=2.0819\\z=0.6479\end{cases}$$

$$1+kG(z)=(z-1)(z-0.368)+0.368(z+0.717)$$

$$Q(z)=z^2+\left(0.368k-1.368\right)z+0.368+0.2639k$$



تحلیل پایداری با استفاده از مکان هندسی ریشه ها

1) $Q(1)>0 \quad\rightarrow 1+0.368k-1.368+0.368+0.2639k>0 \quad\rightarrow k>0$

2) $(-1)^2Q(-1)>0 \quad\rightarrow 1-0.368k+1.368+0.368+0.2639k>0 \quad\rightarrow k<26.2824$

3) $|a_0|<|a_2| \quad\rightarrow |0.368+0.2639k|<1\xrightarrow{k>0}-1<0.368+0.2639k<1\rightarrow k<2.3948$

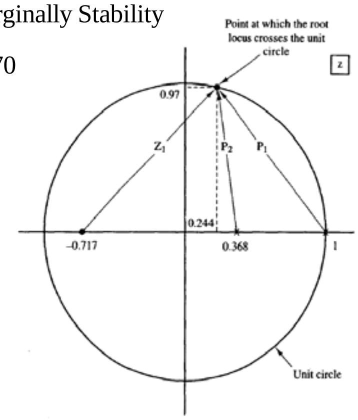
$\overset{1\&2\&3}{\Rightarrow}\boxed{0<k<2.3948}$ $\qquad k=2.3948$: Marginally Stability

$$Q(z)\big|_{k=2.3948}=z^2+0.488z+1=0\rightarrow z=0.244\pm j0.970$$

$$\rightarrow z=1\measuredangle\pm75.8^{(\deg)\circ}=1\measuredangle\pm1.32^{(rad)}=1\measuredangle\pm\omega T^{(rad)}$$

$$\omega T=1.32\overset{T=1s}{\Rightarrow}\omega=1.32^{\left(rad/s\right)}$$

$$k=\frac{p_1p_2}{0.368z_1}=2.39$$

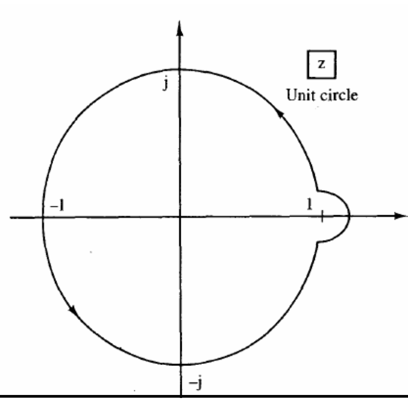


تحلیل پایداری با استفاده از تحلیل نایکوئیست

Z : تعداد ریشه های معادله مشخصه حلقه بسته خارج از دایره واحد

P : تعداد قطب های معادله مشخصه حلقه بسته (تعداد قطب های حلقه باز) در خـارج از دایـره واحد

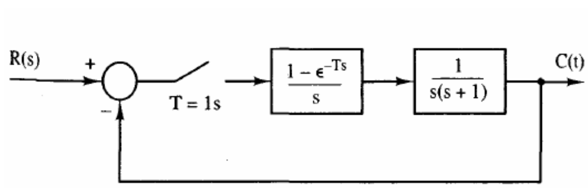
N : تعداد چرخش در جهت عقربه های ساعت حول نقطه -1+j0



$$Z = N + P$$

تحلیل پایداری با استفاده از تحلیل نایکوئیست

مثال :



$$G(z) = \left[\frac{1-e^{-Ts}}{s^2(s+1)}\right]$$

$$\rightarrow G(z) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

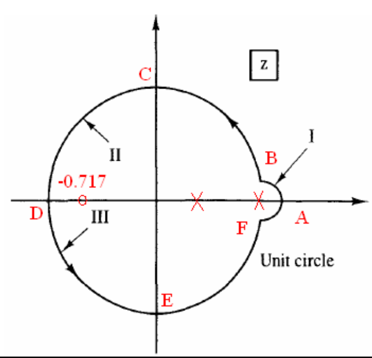
$$S.1:(FAB) \quad z = 1 + \varepsilon e^{j\theta}$$

$$G(z)\big|_{z=1+\varepsilon e^{j\theta}} = \frac{0.632 + 0.368\varepsilon e^{j\theta}}{(\varepsilon e^{j\theta})(0.632+\varepsilon e^{j\theta})} = \mathrm{Re}^{-j\theta} = R\angle\measuredangle\theta$$

$$A: 1+\varepsilon e^{j0} \rightarrow A' : R\measuredangle 0$$

$$B: 1+\varepsilon e^{j\pi/2} \rightarrow B' : R\measuredangle -\pi/2$$

$$F: 1+\varepsilon e^{-j\pi/2} \rightarrow F' : R\measuredangle \pi/2$$



تحلیل پایداری با استفاده از تحلیل نایکوئیست

$$S.2:\quad z=1e^{j\omega T}\qquad {}^{-\omega_s}\!/_{2}<\omega<{}^{\omega_s}\!/_{2}$$

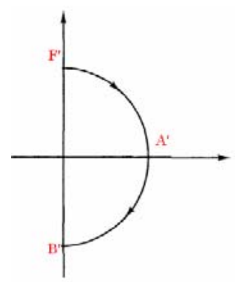
$$G(z)\big|_{z=1e^{j\omega T}}=\frac{0.264+0.368e^{j\omega T}}{(1-e^{j\omega T})(0.368-e^{j\omega T})}=\frac{\left(0.264+0.368e^{j\omega T}\right)(1-e^{j\omega T})(0.368-e^{j\omega T})}{\left(2-2\cos\omega T\right)\left(1.1354-0.736\cos\omega T\right)}$$

$$=\frac{-0.4063+0.0068e^{-j\omega T}+0.1354e^{j\omega T}+0.264e^{-j2\omega T})}{\left(2-2\cos\omega T\right)\left(1.1354-0.736\cos\omega T\right)}$$

$$=\frac{0.264\cos(2\omega T)+0.1354\cos(\omega T)+0.0068\cos(\omega T)-0.4063}{\left(2-2\cos\omega T\right)\left(1.1354-0.736\cos\omega T\right)}+j\frac{-0.264\sin(2\omega T)+0.1354\sin(\omega T)-0.0068\sin(\omega T)}{\left(2-2\cos\omega T\right)\left(1.1354-0.736\cos\omega T\right)}$$

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}=\frac{0.1286\sin(\omega T)-0.264\times\left(2\times\sin(\omega T)\cos(\omega T)\right)}{\left(2-2\cos\omega T\right)\left(1.1354-0.736\cos\omega T\right)}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin(\omega T)=0\rightarrow\begin{cases}\omega T=0 & \times\\ \omega T=k\pi & \surd\end{cases}\\ \cos(\omega T)=\dfrac{0.1286}{2\times0.264}\rightarrow\omega T=1.3219\end{cases}$$



تحلیل پایداری با استفاده از تحلیل نایکوئیست

$$if\ \omega T=\pi\rightarrow\operatorname{Re}\left\{G(e^{j\omega T})\right\}=-0.0380\rightarrow M$$

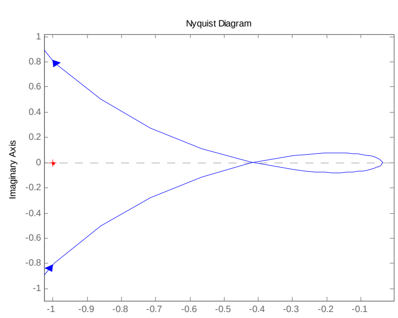
$$if\ \omega T=1.3219\rightarrow\operatorname{Re}\left\{G(e^{j\omega T})\right\}=-0.4195\rightarrow N$$

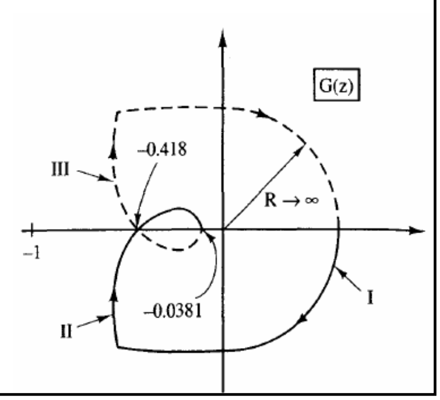
$$\operatorname{Re}\left\{G(e^{j\omega T})\right\}\overset{?}{=}0\times$$

بدون پاسخ:

$$\Rightarrow\begin{matrix}N=0\\P=0\end{matrix}\rightarrow Z=N+P=0\rightarrow$$

سیستم پایدار است.





تحلیل پایداری نسبی با استفاده از تحلیل نایکوئیست

- مفهوم پایداری نسبی برای بررسی پایداری میان دو سیستم پایدار صورت می پذیرد.
  بزرگتر بودن .G.M و .Φ.M سبب می شود پایداری بهتری داشته باشیم .

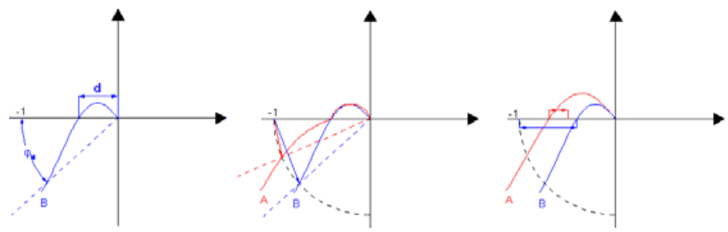
شرط پایداری مطلق برای سیستم های می نیمم فاز: $\begin{cases} G.M.>0 \\ \phi.M.>0 \end{cases}$

Gain Margine : عبارت است از مقدار بهره ای که میتواند به سیستم اضافه گردد و سیستم در حالت پایداری باقی بماند.

$$G.M.=20\log\frac{1}{d}=-20\log d$$

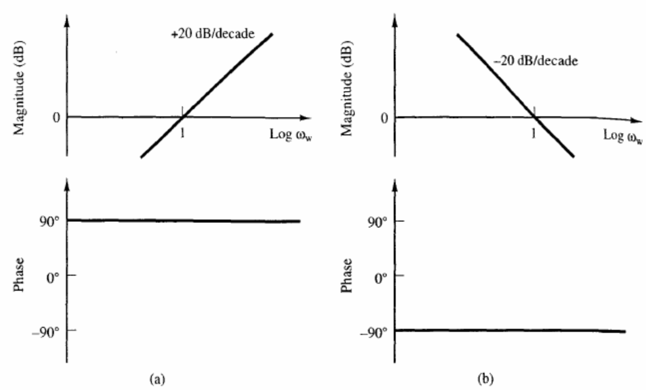
- حاشیه ی فاز : عبارت است از مقدار زاویه ای که لازم است تا منحنی نایکوئیست بچرخد تا منحنی نقطه -1+j0 را لمس کند.

$$\phi.M.=\measuredangle\overline{GH}(z=e^{j\omega T})-\pi$$



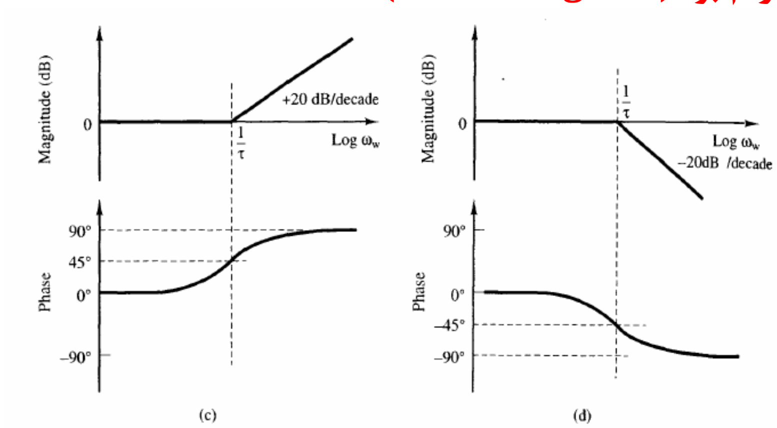
دیاگرام بود(Bode Diagram)

$$G(z)\rightarrow z=\frac{1+\frac{T}{2}w}{1+\frac{T}{2}w}\rightarrow G(w)$$



$\boxed{(a)\,G(w)=j\omega_w}$ $\boxed{(b)\,G(w)=\frac{1}{j\omega_w}}$

دیاگرام بود(Bode Diagram)



$(c)\; G(w) = 1 + j\tau\omega_w$

$$|G(j\omega_w)| = \sqrt{1+\tau^2\omega_w^{\,2}} = \begin{cases} 0 & : \omega_w << \dfrac{1}{\tau} \\ \tau\omega_w & : \omega_w >> \dfrac{1}{\tau} \end{cases}$$

$(d)\; G(w) = \dfrac{1}{1+j\tau\omega_w}$

$$\rightarrow 20\log|G(j\omega_w)| = -20\log|1+j\tau\omega_w|$$

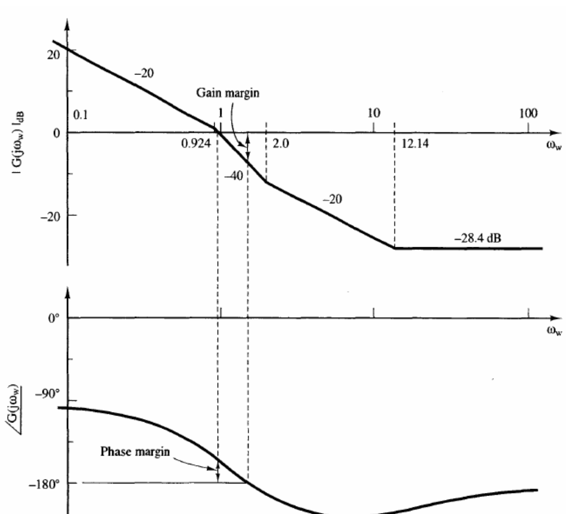
$$= \begin{cases} 0 & : \omega_w << \dfrac{1}{\tau} \\ -20\log|1+j\tau\omega_w| & : \omega_w >> \dfrac{1}{\tau} \end{cases}$$

دیاگرام بود(Bode Diagram)

مثال:

$$G(w) = -\frac{0.381(w-2)(w+12.14)}{w(w+0.924)}$$

$$\rightarrow G(j\omega_w) = \frac{-\left(j\dfrac{\omega_w}{2}-1\right)\left(j\dfrac{\omega_w}{12.14}+1\right)}{j\omega_w\left(j\dfrac{\omega_w}{0.924}+1\right)}$$



باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

سیستم های کنترل دیجیتال

Lecture 8

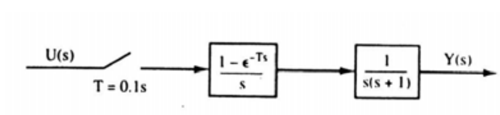
طراحی فیدبک حالت و رؤیتگر حالت

مقدمه

فیدبک حالت:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)\\ y(k)=cx(k)\end{cases}\\ \text{Control Plicy: } u(k)=-Kx(k)\end{array}\right\}\Rightarrow\ x(k+1)=\left(A-B.K\right)x(k)$$

مثال:



$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 0.0952\\ 0 & 0.905\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0.00484\\ 0.0952\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

$$u(k)=-Kx(k)\rightarrow u(k)=-\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}x(k)$$

$$\Rightarrow\quad x(k+1)=\begin{bmatrix}1-0.00484k_1 & 0.0952-0.00484k_2\\ -0.0952k_1 & 0.905-0.0952k_2\end{bmatrix}x(k)$$

ادامه مثال:

$$x(k+1)=\underbrace{\begin{bmatrix}1-0.00484k_1 & 0.0952-0.00484k_2\\ -0.0952k_1 & 0.905-0.0952k_2\end{bmatrix}}_{A_{cl}}x(k)$$

معادله مشخصه حلقه بسته:

$$\Delta_{cl}=\det(zI-A_{cl})=z^2+\left(0.00484k_1+0.0952k_2-1.905\right)z+0.00468k_1-0.0952k_2+0.905=0$$

$$\Delta_{cl\_d}=(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)=z^2-(\lambda_1+\lambda_2)z+\lambda_1\lambda_2$$

$$\Delta_{cl}=\Delta_{cl\_d}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}k_1=105\left[\lambda_1\lambda_2-(\lambda_1+\lambda_2)+1\right]\\ k_2=14.67-5.34\lambda_1\lambda_2-5.17(\lambda_1+\lambda_2)\end{cases}$$

ادامه مثال:

فیدبک حالت:

$$\tau=1$$

$$\ln r=\frac{-T}{\tau}=-0.1\rightarrow r=0.905$$

$$\theta^2=\frac{\ln^2 r}{\xi^2}-\ln^2 r\rightarrow\theta=11.04^o$$

$$\lambda_{1,2}=0.905\measuredangle 11.04^o=0.888\pm j0.173$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}k_1=4.52\\ k_2=1.12\end{matrix}$$

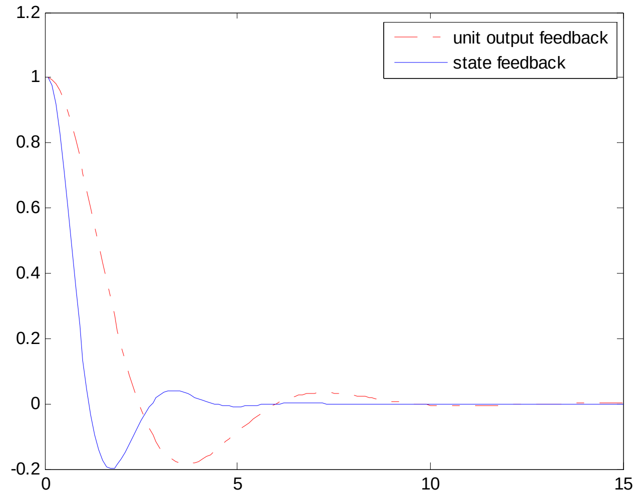
فیدبک واحد خروجی:

$$z^2-1.9z+0.91=0$$

$$\rightarrow z_{1,2}=0.954\measuredangle\pm 0.091\text{ rad}=\text{r}\measuredangle\theta$$

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{-\ln r}{\sqrt{\ln^2 r+\theta^2}}=0.46\\ \tau=\dfrac{-T}{\ln r}=2.12\end{cases}$$

ادامه مثال:



روند طراحی فیدبک حالت

۱- بررسی کنترل پذیری سیستم حلقه باز

۲- مشخص نمودن محل قطب های مطلوب بر اساس خصوصیات مد نظر

۳- استفاده از روش های معمول محاسبه بهره فیدبک حالت (آکرمن، بس گیورا و ...)

ادامه مثال:

$\tau = 0.5$

$$\ln r = \frac{-T}{\tau} = -0.2 \rightarrow r = 0.8187$$

$$\theta^2 = \frac{\ln^2 r}{\xi^2} - \ln^2 r \rightarrow \theta = 0.3861 \text{ rad} = 22.12^o$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = 0.7584 \pm j0.3083$$

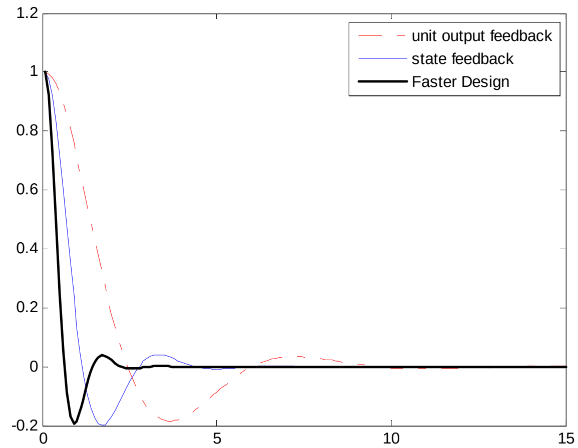
$$\Rightarrow \Delta_{cl\_d} = z^2 - 1.5168z + 0.6702 = \alpha(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 16.11 \\ k_2 = 3.258 \end{cases}$$

روند طراحی فیدبک حالت

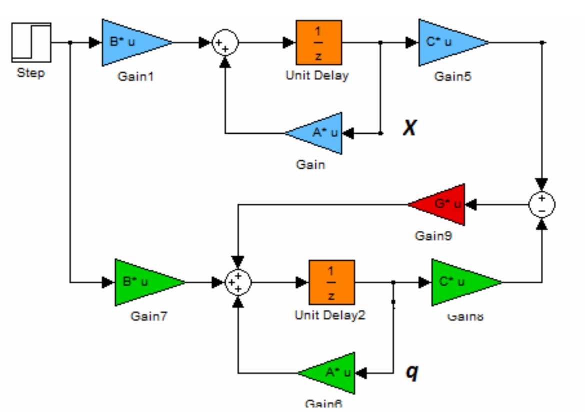
ادامه مثال:

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 16.11 \\ k_2 = 3.258 \end{cases}$$



طراحی رویتگر

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$



$$\begin{cases} q(k+1) = Aq(k) + Bu(k) + G\left(y(k) - \hat{y}(k)\right) = \left(A - G.C\right)q(k) + Bu(k) + G.y(k) \\ \hat{y}(k) = Cq(k) \end{cases}$$

روند طراحی رویتگر حالت

۱- بررسی رویت پذیری سیستم حلقه باز
۲- مشخص نمودن محل قطب های رویتگر که لازم است سریعتر از قطب های مطلوب فیدبک حالت انتخاب گردد.
۳- استفاده از روش های معمول محاسبه بهره رویتگر حالت (آکرمن، بس گیورا و ...)

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.0952 \end{bmatrix}: \text{ full rank}$$

$$\text{Observer Poles: } \; z_{1,2} = 0.819 \quad \Rightarrow \alpha(z) = z^2 - 1.638z + 0.671$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1 = 0.267 \\ g_2 = 0.0777 \end{cases}$$

روند طراحی رویتگر حالت